

1. SUITES : GENERALITES, SUITES ARITHMETIQUES, GEOMETRIQUES

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$.

- a. Calculer u_0 et u_{10}
- b. Exprimer u_{n+1} et $u_n + 1$ en fonction de n .

Exercice 2 Sens de variation

1. Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$\text{a. } u_n = \frac{1}{n} \quad \text{b. } u_n = \frac{n^2+1}{n} \quad \text{c. } u_n = \ln(n) \quad \text{d. } u_n = \frac{3^n}{n}$$

2. Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned} \text{a. } u_0 &= 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \\ \text{b. } u_0 &= 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{u_n} \\ \text{c. } u_0 &= 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \ln(2 + |u_n|) \end{aligned}$$

Exercice 3 Suites bornées

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 3.
2. En déduire qu'elle est bornée

Exercice 4 Suites bornées

Les suites suivantes sont-elles minorées, majorées, bornées, monotones ?

1. $u_n = e^n$
2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
3. $w_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Exercice 5

Un épargnant décide de placer 1 000 euros à la banque. On lui propose deux types de placement : le placement A est un placement à intérêts simples rémunéré à 5% par an ; le placement B est un placement à intérêts composés rémunéré à 3% par an. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites donnant la somme épargnée au bout de n années. Déterminer la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donner la valeur de u_n et v_n en fonction de n . Déterminer pour chacun des deux placements au bout de combien d'années la somme de départ sera doublée.

Exercice 6 Suites arithmétiques. Suites géométriques

1. Pour chacune des suites suivantes, donner le terme général puis calculer la somme des dix premiers termes consécutifs :

a) $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = v_n - 1$

b) $d_3 = 6$ et $\forall n \geq 3, \quad d_{n+1} = d_n + 5$

2. Pour chacune des suites suivantes, donner le terme général puis calculer la somme des dix premiers termes consécutifs :

a) $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3u_{n+1} = u_n$

b) $w_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \frac{w_{n-1}}{2}$

Exercice 7 Suites imbriquées

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_0 = 1, v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$. Construire à partir de (u_n) et de (v_n) deux nouvelles suites de type bien connu, calculer la valeur de ces deux suites et en déduire celle de u_n et de v_n .

On pensera en particulier à étudier les suites $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = u_n - v_n$

2. SUITES DEFINIES PAR RECURRENCE $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 2x + 3}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + 2x + 2 = 0$. En déduire les solutions de cette équation.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 3)^2}$. En déduire les variations de f .
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.
5. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. SUITES ARITHMETICO-GEOMETRIQUES ET RECURRENCE DOUBLE

Exercice 9 Suite auxiliaire

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.
Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie par $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Reconnaître la suite v .
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. *bonus* : calculer $\sum_{k=0}^n u_k$

Exercice 10 Suite auxiliaire et suite récurrente d'ordre 2

Soit u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^5}{u_n^4}$ et $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Déterminer la formule explicite de la suite u à l'aide d'une suite auxiliaire v que l'on choisira judicieusement.

Exercice 11 Suite récurrente d'ordre 2

Déterminer une expression explicite du terme de rang n de la suite u définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 12 suite récurrente d'ordre 2

Déterminer pour chacune des suites récurrentes linéaires suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $u_0 = 1$; $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

Exercice 13

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n & (1) \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + 2b_n & (2) \end{cases}$$

Les questions 2 et 3 permettent de déterminer le terme général de ces suites de 2 manières indépendantes.

1. Calculer a_1 , b_1 , a_2 et b_2
2. **Méthode 1 :**
 - (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$. Montrer que (s_n) est géométrique et déterminer son terme général.
 - (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = a_n - b_n$. Montrer que (d_n) est constante et déterminer son terme général.
 - (c) Déduire en résolvant un système les termes généraux de (a_n) et (b_n) .

3. Méthode 2 :

- (a) En combinant les relations (1) et (2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$
- (b) Déterminer le terme général de (a_n) .
- (c) Dédire celui de (b_n) à l'aide de la relation de récurrence (1)

4- Encore des suites

Exercice 14 Suite homographique

On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

- 1. Démontrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n < 2$.
- 2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est définie et arithmétique.
- 3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

Exercice 15 Une autre suite homographique

Considérons la suite u définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

- 1) Vérifier que u_n est bien défini pour toute valeur entière positive de n .
- 2) a) Déterminer les deux solutions α et β de l'équation $x = \frac{2x + 3}{x + 4}$. On impose $\alpha > \beta$.
- b) Vérifier que la suite v de terme général $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique.
- 3) En déduire une expression simple de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5- Pour aller plus loin

Exercice 16

Soit u une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n + 2^n(n+1)!$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite v par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{n!}$.

- 1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , pour $n \in \mathbb{N}$.
- 2. À l'aide du télescopage, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_0 + 2^n - 1$.
En déduire la formule explicite de la suite u .

Exercice 17

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 2} + 2$.

- 1. Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.
- 2. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi (v_n) est bien définie.
- 3. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
- 4. En déduire la valeur de u_n .

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + n^2 - 2$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n .