

## TD 3 LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

### 1. LOGIQUE

#### Exercice 1

Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. A tout réel, on peut trouver un réel qui lui soit strictement inférieur.
2. Tout réel non nul est l'inverse d'un unique réel non nul.
3. La fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , n'est pas la fonction constante égale à 1.
4. Tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels<sup>1</sup>.
5. Pour tout entier  $n \geq 3$ , l'équation  $x^n + y^n = z^n$ , d'inconnues  $x, y, z$  des entiers naturels non nuls, n'a aucune solution
6. Si un réel positif est inférieur ou égal à tout autre réel strictement positif, alors il est nul.

#### Exercice 2

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs réelles.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- a) la fonction  $f$  s'annule.
- b) la fonction  $f$  est la fonction nulle.
- c)  $f$  n'est pas une fonction constante.
- d)  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur.
- e) la fonction  $f$  présente un minimum.
- f)  $f$  prend des valeurs arbitrairement grandes.
- g)  $f$  ne peut s'annuler qu'une seule fois.
- h) Le polynôme  $P: x \rightarrow x^2 + 1$  n'a pas de racines réelles

#### Exercice 3

Soient les trois propositions suivantes

- a-**  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$   
**b-**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$   
**c-**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Ces propositions sont elles vraies ou fausses? Donner leur négation.

#### Exercice 4

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Donner la signification des propositions suivantes:

1.  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda$
2.  $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
3.  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
4.  $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
5.  $\forall (x, y) \in I^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

### Exercice 5

Donner la négation de chacune des phrases ci-dessous.

1. Tous les élèves de cette classe sont des filles
2. Il a fait beau tous les jours de la semaine
3. Il existe une copie de dissertation de philosophie sans faute d'orthographe
4. S'il y a cours de maths demain, alors je relis mon cours
5. Si on est mercredi, alors il y a des frites à la cantine

### Exercice 6

Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1.  $x \in [-1; 2[$
2.  $\forall x \in E, x^2 \geq 5$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$  ( où  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ )
4.  $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  (Non  $(P \Rightarrow Q)$  est équivalent à  $P$  et non( $Q$ ))

### Exercice 7

Compléter avec "faut" ou "suffit" :

1. Pour avoir le bac, il.....avoir la moyenne.
2. Pour qu'un entier soit pair, il.....que cet entier soit un multiple de 6.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour que  $n < 10$ , il.....que  $n < 13$ .
4. Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a < c$ . Pour que  $b < c$ , il.....que  $b \leq a$ .

## 2. Différents raisonnements

### Exercice 8 Raisonnement par disjonction de cas

$n$  désigne un entier naturel et on note  $A = n(n^2 + 5)$  Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A$  est divisible par 3 grâce à un raisonnement par disjonction de cas.( On pourra étudier la division euclidienne de  $n$  par 3)

### Exercice 9 Raisonnement par contraposition

Soit  $a$  et  $b$  deux réels. On considère la proposition suivante :  
si  $a+b$  est irrationnel, alors  $a$  ou  $b$  sont irrationnels.

1. Quelle est la contraposée de cette proposition?
2. Démontrer la proposition.

### Exercice 10 Raisonnement par l'absurde

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que si on range  $(n + 1)$  paires de chaussettes dans  $n$  tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

### Exercice 11 Raisonnement par l'absurde

Soient  $x, y$  deux réels positifs tels que  $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$

1. Vérifier que  $x^2 - y^2 = -(x - y)$
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que  $x=y$

## 3. Le raisonnement par récurrence

### Récurrence simple

#### Exercice 12

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$$

On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$  et que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie. Calculer les quatre premiers termes de la suite, conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et la démontrer par récurrence sur  $n$ .

#### Exercice 13

Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 5$ ,  $2^n > n^2$

#### Exercice 14

Soit la suite réelle  $v$  définie par 
$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{5v_n - 4}{v_n + 1} \end{cases}$$

Démontrer par un raisonnement par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  existe et  $2 < v_n$ .

### Récurrence double

#### Exercice 15

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad \text{pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ .

### Exercice 16 Récurrence et formule explicite

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par :  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ .  
Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1 + 2^n$ .

### Récurrence forte

### Exercice 17

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .  
Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 2^n$ .