

SUITES.GENERALITES

SOMMAIRE

5.1 Notion de suite

5.1.1 Définition et exemples

5.1.2 Modes de génération d'une suite

5.1.3 Représentation graphique des suites

5.1.4 Opérations sur les suites

5.2 Propriétés globales des suites

5.2.1 Suites majorées, minorées, bornées

5.2.2 Monotonie d'une suite

5.3 Suites remarquables

5.3.1 Suites arithmétiques

5.3.2 Suites géométriques

5.3.3 Suites arithmético-géométriques

5.3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

5.1 Notion de suite

5.1.1 Définition et exemples

Définition 5.1

Une suite réelle est une application d'une partie E de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

On note cette suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, ou $(u_n)_{n \in E}$ ou encore (u_n) (ou parfois seulement u). u_n est appelé terme général d'indice n (ou de rang n).

On note $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles.

Remarque 5.1

- La variable n peut être remplacée par une autre lettre, i, j, p ou k par exemple.
- On utilise souvent des lettres en minuscule pour nommer une suite réelle : $u, v, w, \dots$
- On ne confondra pas la suite réelle u avec son terme général de rang n , u_n
- Le premier rang d'une suite réelle n'est pas obligatoirement 0 ; elle peut être définie à partir d'un rang n_0 quelconque.
- On dit que u_{n_0} est le premier terme ou le terme initial de la suite réelle u .

Exemple 5.1

- La suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n-2}$ n'est définie que pour $n \geq 2$ et on notera la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.
 - Le premier terme est : $u_2 = 0$
 - Le premier terme est : $u_3 = 1$
 - Le premier terme est : $u_4 = \sqrt{2}$
 - Le premier terme est : $u_5 = \sqrt{3}$
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 1$
 - Le premier terme est : $u_0 = -1$
 - Le premier terme est : $u_1 = 0$
 - Le premier terme est : $u_2 = 3$
 - Le premier terme est : $u_3 = 8$

5.1.2 Modes de génération d'une suite

- **Suites définies explicitement**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \frac{n+2}{n+3}$

Autrement dit, on se donne l'expression d'une fonction f telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = f(n)$

Dans l'exemple, on a :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

Exercice 5.1

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \ln(n^2 + 3n)$. Calculer u_1 et u_2
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 3n + 1$. Calculer u_0 et u_7

Exercice 5.2

On note $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$

- (a) Comment est définie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (b) Donner u_1 , u_2 , u_{99} , puis calculer $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n .

- **Suites définies implicitement**

Cas 1 Par récurrence

On donne un ou plusieurs termes initiaux et une relation de récurrence, c'est-à-dire un terme de la suite en fonction du (ou des) termes précédent(s).

(a) Une suite définie par récurrence peut être définie à l'aide du terme précédent :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I vérifiant $f(I) \subseteq I$.

Exemple 5.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = -10 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Ici la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 3$.

Exercice 5.3

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} v_0 = -10 \\ v_{n+1} = -2v_n + 3 \end{cases}$. Calculer v_4

(b) Une suite définie par récurrence peut être définie à l'aide des deux termes précédents :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I vérifiant $f(I) \subseteq I$.

Exercice 5.4

On reprend la même fonction f de l'exercice 5.2 définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = 1$. On admet que $v_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

- (a) Donner v_1, v_2 . Comment calculer v_{99} à priori ?
- (b) En calculant v_3 puis v_4 que peut-on conjecturer pour v_{99} ? v_n ?
- (c) Démontrer par récurrence cette conjecture.

Exemple 5.3 La célèbre suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} F_0 = 1 & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Les premiers termes de la suite sont $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13$, etc.

On parle dans ce cas de suite récurrente d'ordre 2.

Remarque 5.2

Pour calculer par exemple u_{1000} pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence, il faut donc à priori calculer tous les termes $u_1, u_2, \dots, u_{999}$. C'est pourquoi il sera intéressant d'obtenir si cela est possible une expression du terme général **u_n en fonction de n** dans les exercices sur les suites.

Cas 2 A l'aide d'une somme, d'un produit, d'une intégrale.

Exemple 5.4

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{3}{2k+5} \quad p_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{k^2+1}\right) \quad y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Exercice 5.5 Suite définie par une somme

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{3}{2k+5}$$

Définir cette suite à l'aide d'une relation de récurrence

Cas 3 Solution x_n d'une équation du type $f(x) = n$

Une équation dépendant d'un paramètre n appartenant à une partie infinie de $\mathbb{N}$ et admettant des solutions en fonction de n engendre une suite réelle dont les termes correspondent aux solutions.

Exemple 5.5

La suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x_n \text{ est l'unique solution de l'équation } x + \ln(x) = n.$$

Exercice 5.6 Suite définie par une équation

La suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ la suite des solutions strictement positives de l'équation

$$x^2 - 3x = n.$$

(a) Donner le premier terme x_0 et le deuxième terme x_1 .

(b) Déterminer x_n pour $n \in \mathbb{N}$

5.1.3 Représentation graphique des suites

Définition 5.2

Dans un repère (O, i, j) la représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n \in E}$ est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$ avec $n \in E$.

Remarque 5.3

Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$ (ou n dans un sous-ensemble de $\mathbb{N}$).

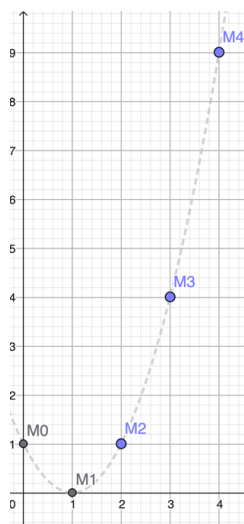
Méthode 5.1

1. Suite explicite : $u_n = f(n)$ avec $n \in E$

l'ensemble des points de coordonnées $(n; f(n))$ où $n \in E$ représentent les termes de la suite définie explicitement par $u_n = f(n)$ où $n \in E$

Exemple 5.6 Suite explicite

Voici la suite $u_n = n^2 - 2n + 1$



2. Suite définie par récurrence : u_{n0} et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $n \in E$

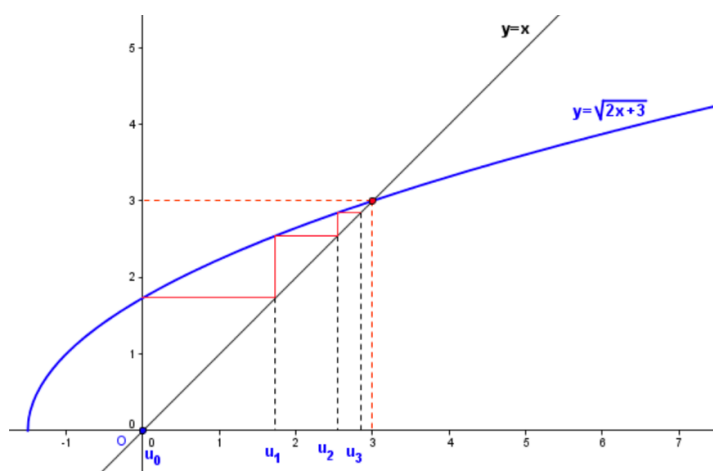
Pour construire la représentation d'une telle suite on utilise la droite d'équation $y=x$, appelée première bissectrice.

Exemple 5.7 Suites définies par récurrence

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

On procède ainsi :

- On trace la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$.
- On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. Autrement dit, on place le point M_0 de coordonnées $(u_0; 0)$.
- On utilise $\mathcal{C}$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
- On utilise $\mathcal{C}$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
- etc.



5.1.4 Opérations sur les suites

Définition 5.3

On définit trois opérations sur les suites, qui sont des opérations termes à termes :

1. **Une addition** : pour toutes suites u et v , $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
2. **Une multiplication par un réel**: pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute suite u , $\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
3. **Une multiplication** : toutes suites u et v , $uv = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

5.2 Propriétés globales des suites

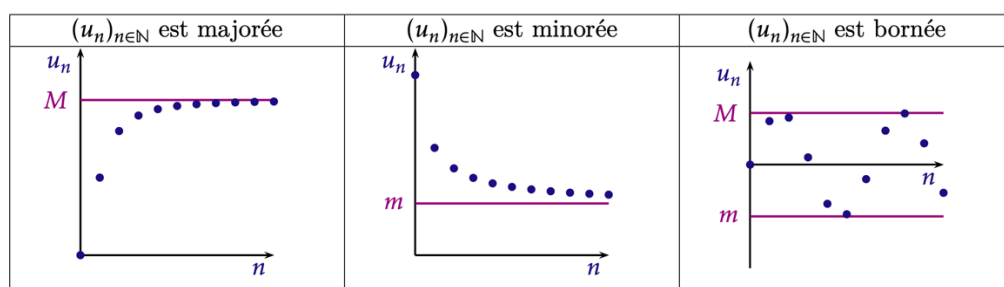
5.2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 5.4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n \leq M$.

Les graphiques ci-dessous illustrent ces différentes propriétés.



Remarque 5.4

- Ces définitions sont valables lorsque la suite est définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.
- **Les réels m et M ne dépendent pas de n .**
- On a également l'équivalence :
 $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, -K \leq u_n \leq K$.
- Si une suite est majorée (resp. minorée) alors elle admet une infinité de majorants (resp. de minorants).
- **Une suite décroissante est majorée par son premier terme; alors qu'une suite croissante est minorée par son premier terme.**

Exemple 5.8

La suite définie pour tout entier n , par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est majorée par 1 (puisque $n+1 \geq 1 > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$)
 Elle est minorée par 0. Elle est donc bornée: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{n+1} < 1$.

Méthode 5.2 Montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée

Il y a plusieurs méthodes parmi lesquelles on choisit la mieux adaptée à la suite étudiée.

On note E une partie de $\mathbb{N}$ i.e. $E = \llbracket n_0; +\infty \rrbracket$

- **Pour les suites définies explicitement par $u_n = f(n)$ avec $n \in E$**

Dans ce cas on peut étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$

Si f est majorée, minorée ou bornée la suite l'est également .

- **Pour les suites définies par récurrence par u_{n_0} et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $n \in E$**

On peut montrer que la suite est majorée, minorée ou bornée en utilisant un **raisonnement par récurrence**.

- **Dans tous les cas:** On peut raisonner directement à l'aide d'inégalités obtenues de manière algébrique ou découlant de questions précédentes données dans l'exercice.

Exercice 5.7

Montrer de deux façons différentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3n}{n+1}$ est majorée par 3.

Exercice 5.8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Démontrer par récurrence que (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.

5.2.2 Monotonie d'une suite

Définition 5.5

Une suite $(u_n)_{n \in E}$ est :

1. est **croissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$ (i.e $u_{n+1} - u_n \geq 0$) `
2. est **strictement croissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$
(i.e $u_{n+1} - u_n > 0$)
3. est **décroissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$ (i.e. $u_{n+1} - u_n \leq 0$)
4. est **strictement décroissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$
(i.e. $u_{n+1} - u_n < 0$)
5. est constante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$
6. est **monotone** si et seulement si elle est croissante ou décroissante

Remarque 5.5

- On s'intéresse uniquement aux variations à partir d'un certain rang uniquement. Par exemple si une suite est décroissante jusqu'au rang 3 et croissante à partir du rang 3 on dira que "la suite est croissante à partir du rang 3"
- **Attention :** Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes, même à partir d'un certain rang comme $(-1)^n$.

Méthode 5.3 Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante

Plusieurs méthodes sont possibles selon les cas.

- **Méthode 1 : Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$**
 - La suite est **croissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$
 - La suite est **décroissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$
- **Méthode 2 : Si $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ (suite à termes positifs) alors on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1**
 - La suite est **croissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
 - La suite est **décroissante** à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$
- **Méthode 3: Pour les suites définies explicitement par $u_n = f(n)$ avec $n \in E$**

On étudie la monotonie de f sur $[n_0; +\infty[$

- **Méthode 4 : Valable seulement pour les suites définies par récurrence**

Cette méthode est souvent (mais pas toujours) la bonne pour les suites récurrentes.
Pour montrer qu'une suite est **croissante**, on montre par récurrence que

$$\text{pour tout } n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$$

et

Pour montrer qu'une suite est **décroissante**, on montre par récurrence que

$$\text{pour tout } n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$$

Exemple 5.9

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 + 3$ est strictement croissante.

En effet, on a : $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3 - (n^2 + 3) = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
Or $n \in \mathbb{N}$ donc $2n + 1 \geq 1 > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est strictement croissante :

Nous avons $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par : $u_n = \frac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2 \times (n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{3}{n+1}$ est strictement décroissante :

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x+1}$. La fonction f est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$ donc *a fortiori* sur $[0; +\infty[$, donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 5.9

Etudier les variations de la suite (u_n) donnée dans chaque cas.

1. Méthode 1

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

2. Méthode 2

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3^n}{n}$$

3. Méthode 3

$$a. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - n$$

$$b. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+2}$$

4. Méthode 4

$$a. \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \text{ et } u_0 = 0 \text{ (on considérera } P(n): 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \text{)}$$

$$b. \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n^2 \text{ et } u_0 = 3 \text{ (} P(n): 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \text{)}$$

5.3 Suites remarquables

5.3.1 Suites arithmétiques

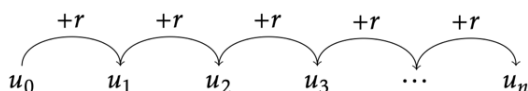
Définition 5.6

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r :



Exemple 5.10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par: $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 2$

Méthode 5.4

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$$

Où r , constante réelle, est la raison de la suite.

Exemple 5.11

1. La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 2$ est arithmétique de raison 3 car

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n - 2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3$$

Qui équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3$

2. Considérons la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Comme $2n+1$ n'est pas une constante puisque c'est un nombre qui dépend de l'entier naturel la suite n'est pas arithmétique.

Exercice type 5.10

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

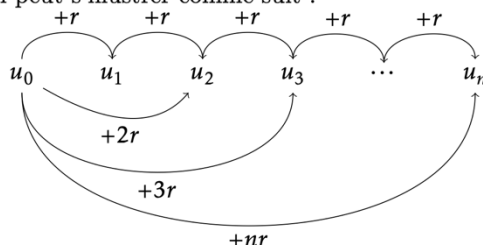
1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + 5n$
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 + n + 1$

Proposition 5.1 Formule explicite d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr.$$

Cette proposition peut s'illustrer comme suit :



Remarque 5.6

$$\forall n \geq 1, u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$\forall n \geq 2, u_n = u_2 + (n-2)r$$

$$\forall n \geq p, u_n = u_p + (n-p)r$$

Proposition 5.2 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique (chapitre 4)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Notons S_n la somme des $n+1$ premiers termes consécutifs de la suite (u_n) , à savoir pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Remarque 5.7

Il peut être plus aisé de retenir la formule suivante

$$\text{Somme [suite arithmétique]} = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Déjà vu et à savoir par ♥

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En effet, il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 1$.

Exercice 5.11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$

Calculer la somme S_n des $n+1$ premiers termes

Proposition 5.3 Monotonie d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Démonstration. Cela découle immédiatement du fait que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$

5.3.2 Suites géométriques

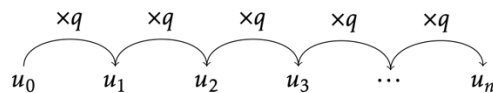
Définition 5.7

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q :



Exemple 5.12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Ainsi, la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2, \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = 3 \times u_n$

Méthode 5.5

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

Où q , constante réelle, est la raison de la suite.

Remarque 5.8

Dans le cas où on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ (et uniquement dans ce cas) on peut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Où q constante réelle est la raison de la suite

Exemple 5.13

- La suite (u_n) définie par : pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 2^n$ est géométrique .

Tout d'abord on constate que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$.

Donc pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ qui équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$

Et la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

- La suite (u_n) définie par : pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = n^2$ n'est pas géométrique .

En effet, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$ et $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$.

Exercice type 5.12

Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

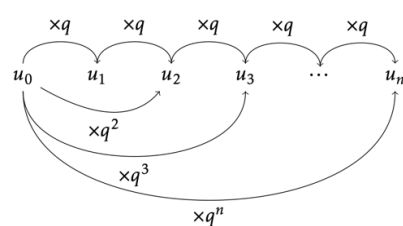
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 1$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2 \times 3^n}{5^{n+1}}$

Proposition 5.4 Formule explicite d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_0 q^n$$

Cette proposition peut s'illustrer comme suit :



Remarque 5.9

$$\forall n \geq 1, u_n = u_1 q^{n-1}$$

$$\forall n \geq 2, u_n = u_2 q^{n-2}$$

$$\forall n \geq p, u_n = u_p q^{n-p}$$

Proposition 5.5 Somme des premiers termes d'une suite géométrique (chapitre 4)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 . Notons S_n la somme des $n+1$ premiers termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à savoir

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque 5.10

Il peut être plus aisé de retenir la formule suivante de la somme des premiers termes d'une suite géométrique

$$\text{Somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Déjà vu et à savoir par ♥ $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

En effet, il s'agit des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison q .

Exercice 5.13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Calculer la somme S_n des $n+1$ premiers termes

Proposition 5.6 Monotonie d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors:

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone.

5.3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 5.8

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que :

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque 5.11 Des cas particuliers

- Si $a=1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$ i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b .
- Si $b=0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$ i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a .
- Si $a=0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b$ i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante égale à b .

Exemple 5.14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

C'est une suite **arithmético-géométrique** avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = 4$

Proposition 5.7

Soit u une suite arithmético-géométrique définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$
Avec $a \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Soit ℓ l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (appelé **point fixe**).

Alors la suite v définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell, \text{ est une suite géométrique de raison } a.$$

Remarque 5.12

L'équation pour trouver ℓ peut aussi s'écrire $\ell = a\ell + b$. En notant f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, l'équation devient $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de la fonction f .
l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (appelé **point fixe**).

Méthode 5.6 Pour déterminer la formule explicite une suite arithmético-géométrique

1. Reconnaître la suite arithmético-géométrique, on écrit :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : " $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$ avec $a = \dots$ et $b = \dots$ est une suite arithmético-géométrique.

2. Déterminer le point fixe ℓ en résolvant l'équation $x = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}$ (dans ce cas $a \neq 1$)

3. Définir une suite auxiliaire v telle que: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell$ et on démontre qu'elle est géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$.

4. En déduire le terme général de v : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (u_0 - \ell) \times a^n$

5. Donner le terme général de u : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - \ell) \times a^n + \ell$ avec $\ell = \frac{b}{1-a}$

Remarque 5.13

On se rappelle que la formule explicite à trouver est

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - \ell) \times a^n + \ell$$

Exercice type 5.14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n

Exercice 5.15

Déterminer le terme général de la suite suivante et calculer la somme des $n+1$ premiers termes où :

+ 1

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Exercice 5.16

Déterminer le terme général de la suite suivante et calculer la somme des n premiers termes où :

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 3v_n - 1 \end{cases}$$

5.3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Définition 5.9

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **une suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que :

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Une telle suite est déterminée par les réels a et b et les termes initiaux u_0 et u_1 .

Remarque 5.14

On se limite au cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$ pour que l'étude soit intéressante

Définition 5.10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation du second degré

$$r^2 = ar + b$$

Théorème 5.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Notons (E) son équation caractéristique associée.

- Si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

où α et β sont des réels déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.

- Si (E) admet une racine réelle double r_0 , alors le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n) r_0^n.$$

où α et β sont des réels déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.

- Le cas où (E) n'admet pas de racines réelles est hors programme.

Exemple 5.15

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = -6 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + \frac{5}{6}u_n \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée à la suite précédente est $r^2 = 2r + \frac{5}{6} \Leftrightarrow r^2 - 2r - \frac{5}{6} = 0$

Méthode 5.7 Pour déterminer la formule explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

1. Reconnaître la suite récurrente linéaire d'ordre 2, on écrit :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : “ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $a=...$ et $b=...$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. Résoudre l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ puis on applique le théorème
3. Déterminer α et β à l'aide du système obtenu à partir des valeurs de u_0 et u_1
4. Donner l'expression général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n en remplaçant α et β par leurs valeurs.

Exercice 5.17

Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

Exercice 5.18

Déterminer le terme général de la suite suivante appelée suite de Fibonacci

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$