

SOMMES ET PRODUITS

Sommaire

4.1 Sommes

4.1.1 Définition et propriétés

4.1.2 Changement d'indice dans une somme

4.1.3 Sommes de référence

4.1.4 Sommes télescopiques

4.2 Produits

4.2.1 Définition et propriétés

4.2.2 Notation factorielle

4.2.3 Produits télescopiques

4.3 Sommes doubles

4.1 Sommes

4.1.1 Définition et premières propriétés

Exemple 4.1

Dans ce chapitre, on se donne une notation et on énonce des propriétés permettant de répondre, par exemple, aux questions suivantes :

Comment écrire mathématiquement: « La somme 20 premiers des entiers naturels pairs (et non nuls) » ?

La somme des n premiers termes de la suite géométrique de 1er terme 2 et de raison 3?

Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$?

Définition 4.1

Soient les nombres $a_0, \dots, a_n$.

On note :

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

La **somme** de gauche se lit "somme de $k = 0$ à n des a_k ".

Plus généralement,

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n.$$

La somme de gauche se lit "somme de $k = p$ à n des a_k ".

a_k s'appelle le terme général de la somme et k s'appelle l'indice de sommation.

Exemple 4.2

$$\ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$$

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} = \sum_{k=0}^{100} 2^k$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \sum_{k=2}^7 \frac{(-1)^k}{k}$$

Exercice 4.1

Écrire les sommes suivantes avec le symbole Σ

1. $A = 2 + 6 + 10 + 14 + 18$.

2. $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$.

3. $C = 3 - 6 + 9 - 12 + 15$.

Exercice 4.2

Ecrire avec des pointillés les sommes suivantes

$$A = \sum_{k=2}^{50} k^2, \quad B = \sum_{p \in \llbracket 1; 9 \rrbracket} e^{\sqrt{p}}, \quad C = \sum_{1 \leq j \leq 100} \frac{\ln j}{j+1}.$$

Proposition 4.1 fondamentale

Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$.

- Il y a n entiers dans l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$.
- Il y a $n + 1$ entiers dans l'ensemble $\llbracket 0; n \rrbracket$.
- Il y a $n - m + 1$ entiers dans l'ensemble $\llbracket m; n \rrbracket$.

Remarque 4.1

1. Par convention si $n < m$ alors $\sum_{k=m}^n u_k = 0$.
2. La lettre k est **une variable muette**: on peut la changer par n'importe quelle autre lettre (**sauf n et m !**) sans changer la valeur de la somme.

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{i=m}^n u_i = \sum_{j=m}^n u_j$$

3. Dans une somme, la variable prend toutes les valeurs entières comprises entre m et n .
4. On peut aussi écrire

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{m \leq k \leq n} u_k = \sum_{k \in \llbracket m; n \rrbracket} u_k$$

Propriété 4.1 Linéarité

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et pour tous m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, on a:

$$* \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

$$* \sum_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k$$

Attention : Dans la deuxième formule, le réel λ ne dépend pas de k : une somme du type

$$\sum_{k=m}^n (a_k b_k) \text{ ne se simplifie pas.}$$

Propriété 4.2 Relation de Chasles :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq p \leq n-1$

Remarque 4.2 importante

La relation de Chasles implique de manière immédiate que pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \text{ soit } \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1}$$

Cette égalité permet de démontrer un très grand nombre de formules comportant des sommes, à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

On a aussi

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^0 a_k + \sum_{k=1}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k$$

Méthode 4.1 Décomposition d'une somme à l'aide de la relation de Chasles

Dans certains cas, il faudra ajouter ou retrancher certains termes afin de faire apparaître une somme connue :

$$j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \text{ avec } n \geq 2, \sum_{k=j}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{j-1} a_k.$$
$$\underbrace{\overbrace{1, 2, \dots, j-2, j-1}^{\text{de 1 à } j-1}, \overbrace{j, j+1, \dots, n-1, n}^{\text{de } j \text{ à } n}}_{\text{de 1 à } n}$$

Par exemple on souhaite calculer en fonction de n ($n \geq 5$) la somme suivante :

$$\sum_{j=5}^n j = \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^4 j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{4(4+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - 10 \dots$$

Exemple 4.3 Calcul de la somme classique $\sum_{k=0}^n k$

Cette formule peut se démontrer par récurrence. Soit n un entier naturel,

on pose $P(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

1. **Initialisation** Pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^0 k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.

2. Hérédité On suppose que pour un entier naturel n fixé la propriété $P(n)$ est vraie i.e.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{Et on veut montrer que } P(n+1) \text{ est vraie c'est-à-dire que } \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^n k + (n+1) \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, $P(n+1)$ est vraie et la propriété P est héréditaire.

3. Conclusion. La propriété P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour démontrer la somme des premiers entiers naturels on peut aussi utiliser une autre méthode qui utilise la linéarité et une astuce :

Remarquons tout d'abord que $S_n = \sum_{k=0}^n (n-k)$. En effet:

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + \dots + (n-1) + n = n + (n-1) + \dots + 1 + 0 = \sum_{k=0}^n (n-k).$$

Donc $2S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n (k+n-k) = \sum_{k=0}^n n = n \sum_{k=0}^n 1 = n(n+1)$ et on retrouve la formule bien connue $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 4.3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Alors :

$$\sum_{k=m}^n a = (n - m + 1)a$$

Exercice 4.3

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^6 3, \quad \sum_{k=0}^9 35, \quad \sum_{k=8}^{11} 10$$

4.1.2 Changement d'indice dans une somme

Pour commencer, nous étudions le cas simple où on fait un décalage de 1

Considérons la somme $\sum_{i=1}^n a_i$. On pose $j = i - 1$. Ainsi,

- $i = j + 1$.
- Lorsque $i = 1$, alors $j = 0$.
- Lorsque $i = n$, alors $j = n - 1$.

On a ainsi l'égalité:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}.$$

Exemple 4.4

Calculer la somme $S = \sum_{i=1}^6 (i - 1)$

On pose $j = i - 1$: si $i = 1$ alors $j = 0$ et si $i = 6$ alors $j = 5$

Donc : $S = \sum_{j=0}^5 j = \frac{5(5+1)}{2} = 15$

Exercice 4.4

1. Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^9 2(k - 1)$ à l'aide d'un changement d'indice puis retrouver le résultat à l'aide de la linéarité.
2. Calculer la somme $S = \sum_{i=1}^5 \frac{i^2 + 2i - 3}{i + 3}$

Propriété 4.4 (Changement d'indice)

Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $n \leq m$ alors

$$\sum_{k=n}^m a_{k+p} = \sum_{i=n+p}^{m+p} a_i$$

On dit alors qu'on a effectué le changement d'indice $i = k + p$

Remarque 4.3

1. Pour passer de $\sum_{k=p}^n x_{k+m}$ à $\sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$:
 - (a) On pose $i = k + m$, soit encore $k = i - m$.
 - (b) Dans le terme général de la somme, on remplace chaque $k + m$ par i .
 - (c) Pour les bornes :
 - i. Borne inférieure : lorsque $k = p$, $i = p + m$
 - ii. Borne supérieure : lorsque $k = n$, $i = n + m$.
 - (d) On obtient alors $\sum_{k=p}^n x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$.
2. Pour écrire $\sum_{k=p}^n x_k$ de sorte à ce que le premier indice soit zéro, on effectue le changement d'indice $i = k - p$, on a alors $k = i + p$ et

$$\sum_{k=p}^n x_k = \sum_{i=0}^{n-p} x_{i+p}.$$

3. Lorsque l'on effectue un changement d'indice, il faut vérifier que les premiers termes des deux sommes sont les mêmes.

Exercice 4.5

Compléter

1. $\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$
2. $\sum_{k=0}^n a_{k+3} = \sum_{j=\dots}^{\dots} a_j$

Exercice 4.6 Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^3 \ln(k+2)$ à l'aide d'un changement d'indice

4.1.3 Sommes de référence

Proposition 4.2 Somme des premiers entiers naturels (Voir exemple 4.3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{somme des } n \text{ premiers entiers naturels})$$

Généralisation

$$\sum_{k=p}^n k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2} = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Proposition 4.3 Sommes des premiers carrés et des premiers cubes

1. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme des n premiers carrés)
2. $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (somme des n premiers cubes)

Remarque 4.4

On sait que $\sum_{k=0}^n k = 0 + \sum_{k=1}^n k$ donc $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k$ ce qui se vérifie encore avec la formule

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \sum_{k=0}^n k$$

Il en est de même pour la somme des carrés et des cubes .

Exercice 4.7

A l'aide d'un raisonnement par récurrence démontrer les formules de la proposition 4.3

Proposition 4.4 somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$,

$$\sum_{p=0}^n q^p = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Généralisation

Soit $q \neq 1$,

$$\sum_{p=m}^n q^p = q^m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Démonstration

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

Initialisation Pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^1 q^k = q^0 = 1$ et $\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité On suppose que pour un entier naturel n fixé la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie à savoir

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} . \text{ On veut montrer que } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie i.e. } \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion La propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir : $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 4.8

Calculer les sommes suivantes: $\sum_{k=0}^6 2^k = \sum_{k=0}^{10} \frac{2^k}{3^{k+2}} =$

Remarque 4.5

Il faut bien étudier et connaître les démonstrations des propositions 4.3 et 4.4

4.1.4 Sommes télescopiques

L'idée est de pouvoir écrire le terme général de la somme comme la différence de deux termes consécutifs d'une suite.

Principe du télescopage

Lorsque les termes $(a_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont de la forme $a_k = u_{k+1} - u_k$ pour une certaine famille de réels $(u_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, les calculs de somme se simplifient :

$$\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+3} - u_{p+2}) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_p.$$

On a ainsi $\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$.

C'est ce qu'on appelle une simplification par télescopage, et on parle de somme télescopique.

Notons qu'on peut aussi retrouver cette simplification en utilisant la linéarité puis le changement de variable $j = k + 1$ et enfin la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=p}^n u_{k+1} - \sum_{k=p}^n u_k \quad [\text{linéarité}] \\ &= \sum_{j=p+1}^{n+1} u_j - \sum_{k=p}^n u_k \quad [\text{changement de variable } j=k+1] \\ &= \left(u_{n+1} + \sum_{j=p+1}^n u_j \right) - \left(u_p + \sum_{k=p+1}^n u_k \right) \quad [\text{Relation de Chasles}] \\ &= u_{n+1} - u_p \quad [\text{les deux sommes sont les mêmes}] \end{aligned}$$

Exercice 4.9

$$\text{On pose } S = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. Dédurre de la question précédente une autre écriture de S . On pourra commencer par écrire la somme avec des pointillés. Calculer la valeur exacte de S .

4.2 Produits

4.2.1 Définition et propriétés

Définition 4.2

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$.

$$\prod_{k=m}^n u_k = u_m \times u_{m+1} \times \dots \times u_n$$

La notation

$$\prod_{k=m}^n u_k$$

Se lit “produit des u_k pour k variant de m et n ” ou “produit de k égal m à n des u_k ”.

Remarque 4.6

- Par convention, si $n < m$ alors $\prod_{k=m}^n u_k = 1$.
- La lettre k est une variable muette: on peut la changer par n'importe quelle autre lettre (sauf n et m !) sans changer la valeur du produit. Par exemple :

$$\prod_{k=m}^n u_k = \prod_{i=m}^n u_i = \prod_{j=m}^n u_j.$$

- Dans un produit, la variable muette prend toutes les valeurs entières comprises entre m et n .

- On peut aussi écrire :
$$\prod_{k=m}^n u_k = \prod_{m \leq k \leq n} u_k = \prod_{k \in \llbracket m, n \rrbracket} u_k.$$

Exercice 4.10

Ecrire les expressions suivantes sans le signe $\prod$

- $\prod_{k=3}^5 k^2$
- $\prod_{k=2}^7 \frac{k}{k+1}$

Ecrire les expressions suivantes avec le signe $\prod$

- $1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32$
- $\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{9}{11}$

Propriété 4.5

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et pour tous m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, on a :

- $\prod_{k=m}^n (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \times \left(\prod_{k=m}^n b_k \right).$
- En supposant que $\forall k \in \llbracket m, n \rrbracket \quad b_k \neq 0$ alors :
$$\prod_{k=m}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\prod_{k=m}^n a_k}{\prod_{k=m}^n b_k}.$$
- Relation de Chasles : $\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m}^p a_k \times \prod_{k=p+1}^n a_k$ pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq p \leq n-1$.
- $\prod_{k=0}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^n a_k.$

Remarque 4.7



INTERDIT ! Un produit de la forme $\prod_{k=m}^n (a_k + b_k)$ ne se simplifie pas!

Remarque 4.8 Soit a un réel alors pour tout entier naturel n on a

$$\prod_{k=1}^n a = a^n$$

$$\prod_{k=0}^n a = a^{n+1}$$

$$\prod_{k=m}^n a = a^{n-m+1} \quad \prod_k a = a^{\text{nombre de termes}}$$

Exercice 4.11 Calculer les deux produits suivants :

$$\bullet \prod_{k=1}^n 3$$

$$\bullet \prod_{k=0}^n \frac{4^k}{2}$$

4.2.2 Notation factorielle

Définition 4.3

Soit n dans $\mathbb{N}$. On appelle **factorielle de l'entier n** le nombre noté $n!$ et défini par:

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n \quad \text{avec la convention } 0! = 1.$$

Exemple 4.5

- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
- $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$.
- $25! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 25 = 15511210043330985984000000$.

Exercice 4.12

- 1- Simplifier les expressions suivantes : $\frac{7!}{5!}$, $\frac{10!}{8! \times 2!}$, $\frac{n!}{(n+2)!}$
- 2- Exprimer à l'aide de la factorielle le produit $U_n = \prod_{k=1}^n (5k)$
- 3- Calculer le produit

$$W_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Remarque 4.9

Quand on somme ou qu'on fait le produit d'un nombre **fini** de termes, on peut faire cette somme ou ce produit dans l'ordre que l'on veut sans changer le résultat. Ainsi il peut parfois être utile de réarranger les termes dans un autre ordre.

Voir première méthode exemple 4.3 pour montrer que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

4.2.3 Produits télescopiques

Principe

Dans le cas d'un produit, le télescopage a lieu quand $a_k = \frac{v_{k+1}}{v_k}$ (avec $v_k \neq 0$ pour tout k).

La simplification s'écrit alors :

$$\prod_{k=p}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{p+1}}{v_p} \times \frac{v_{p+2}}{v_{p+1}} \times \frac{v_{p+3}}{v_{p+2}} \times \dots \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_{n+1}}{v_p}$$

c'est à dire $\prod_{k=p}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_p}$.

Exemple 4.6

Calculer $\sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$, $n \geq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}; +\infty$,

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \ln \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \right) \text{ d'après les propriétés de la fonction } \ln. \sum_{k=p}^n \ln(a_k) = \ln \left(\prod_{k=p}^n a_k \right)$$

On reconnaît le télescopage pour un produit de quotient de deux termes consécutifs,

On utilise $\prod_{k=p}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_p}$ avec $v_k = k$

$$\text{Ainsi : } \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2} \text{ et on a : } \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; +\infty, \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{2} \right).$$

Autre méthode :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}; +\infty, \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \text{ d'après les propriétés de la fonction}$$

$$\ln. \ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln(a) - \ln(b)$$

On reconnaît le télescopage,

On utilise $\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$ avec $u_k = \ln(k)$

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln(n+1) - \ln(2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; +\infty, \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{2} \right).$$

Méthode 4.2 Passage de $\sum$ à $\prod$ et réciproquement

Via les fonctions exponentielles et logarithmes.

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a \times e^b$ se généralise en :

$$\forall a_p \in \mathbb{R}, \dots, \forall a_n \in \mathbb{R}, \quad \exp \left(\sum_{k=p}^n a_k \right) = \prod_{k=p}^n \exp(a_k)$$

$\forall a > 0, \forall b > 0, \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ se généralise en :

$$\forall a_p > 0, \dots, \forall a_n > 0, \quad \ln \left(\prod_{k=p}^n a_k \right) = \sum_{k=p}^n \ln(a_k)$$

Exemple 4.7

Par exemple, calculons le produit $P = \prod_{k=1}^n e^{6k^2}$. Ses facteurs sont strictement positifs, d'où

$$\ln(P) = \sum_{k=1}^n \ln(e^{6k^2}) = \sum_{k=1}^n 6k^2 = n(n+1)(2n+1).$$

Finalement

$$P = \exp(n(n+1)(2n+1)).$$

4.3 Sommes doubles

On considère une famille de nombres réels indexés par deux indices : un indice i variant entre 1 et n pour un entier n donné et un indice j variant entre 1 et p pour un entier p donné.

On peut représenter ces nombres dans un tableau où l'indice i représente le numéro de ligne et l'indice j le numéro de colonne :

$i \backslash j$	1	2	3	...	p
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1p}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{np}

La somme de tous les éléments a_{ij} de ce tableau est notée $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}$.

Pour la calculer, on peut soit faire la somme des termes ligne par ligne et on a alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}.$$

soit faire la somme des termes colonne par colonne et on a alors

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

Exemple 4.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \sum_{i=1}^n i \left(\sum_{j=1}^n j \right) \quad \text{car } i \text{ ne dépend pas de } j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n j \right) \times \left(\sum_{j=1}^n i \right) \quad \text{car } \sum_{j=1}^n j \text{ ne dépend pas de } i \\ &= \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 4.13

Calculer

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2$$