

ELEMENTS DE LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Sommaire

3.1 Eléments de logique

3.1.1 Quantificateurs

3.1.2 Différents types d'énoncés mathématiques

3.2 Connecteurs logiques

3.2.1 Connecteurs logiques et opérations

3.2.2 Règles relatives aux connecteurs logiques

3.3 Différents types de raisonnement

3.3.1 Raisonnement direct

3.3.2 Raisonnement par disjonction de cas

3.3.3 Raisonnement par contraposée

3.3.4 Raisonnement par l'absurde

3.3.5 Raisonnement par double implication

3.3.6 Raisonnement par contre-exemple

3.3.7 Raisonnement par récurrence

3.1 Eléments de logique

3.1.1 Quantificateurs

Définition 3.1

$\forall$ est le quantificateur universel. Il se lit “quelque soit” ou “pour tout”.

On l'utilise pour exprimer qu'un énoncé mathématique est vrai quelque soit la valeur de la variable.

$\exists$ est le quantificateur existentiel. Il se lit “il existe (au moins) un”.

On l'utilise pour exprimer qu'un énoncé mathématique est vrai pour au moins une valeur de la variable.

Remarque 3.1

Pour exprimer qu'un énoncé mathématique est vrai pour une unique valeur de la variable on utilise le pseudo quantificateur existentiel, noté $\exists!$ qui se lit “il existe un unique”.

Exemple 3.1

- “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ” se lit : “**pour tout réel x , le carré de x est positif ou nul**”
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 = 0$ ” se lit : “**Il existe un réel x , tel que $x^2 + 2x - 3 = 0$** ”
- “ $\exists! x \in \mathbb{Z}, x + 1 = 0$ ” se lit : “**Il existe un unique entier relatif x , tel que $x + 1 = 0$** ”

A l'inverse il est aussi important de savoir passer du langage naturel au langage mathématiques

Exemple 3.2

L'énoncé : “Etant donné un nombre entier quelconque , en lui ajoutant 2, on obtient encore un nombre entier naturel” se traduit par

$$\forall n \in \mathbb{N}, n + 2 \in \mathbb{N}$$

Exercice 3.1

Exprimer à l'aide des quantificateurs les expressions suivantes :

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.
2. n est un entier impair.
3. Pour tout entier n , $n(n+1)$ est un entier pair.
4. Pour tout nombre réel, il existe un entier naturel qui lui est supérieur.

Exercice 3.2

Traduire par une phrase les expressions suivantes :

1. $\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R}^*, y^2 < x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.
3. $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

Remarque 3.2

- **Les quantificateurs identiques commutent**

Par exemple les deux phrases mathématiques

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ ont le même sens

MAIS ATTENTION !

De façon générale on ne peut pas intervertir l'ordre de deux quantificateurs différents.

Ainsi $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M > 0, f(x) \leq M$ n'ont pas le même sens

3.1.2 Différents types d'énoncés mathématiques

Définition 3.2

- Une **proposition** ou assertion ou une affirmation est un énoncé mathématique pouvant être vrai ou faux.
- Un **théorème** est une proposition qui a été démontrée.
- Un **lemme** est un théorème servant à établir un théorème plus important.
- Un **corollaire** est un théorème qui est une conséquence d'un autre théorème.
- La **démonstration** d'une assertion est un processus respectant strictement les règles de la logique, **partant des hypothèses**, supposées vraies, et en aboutissant à la conclusion attendue. La démonstration permet d'établir qu'une assertion est vraie.
- Une **conjecture** est une assertion dont on pense qu'elle est vraie, mais qui n'a pas été démontrée.

Exercice 3.3

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
2. La fonction logarithme népérien est positive sur $]0; +\infty[$

Définition 3.3

Une assertion est complète si toutes les variables qui interviennent sont quantifiées par un quantificateur $\forall$ ou $\exists$.

Exemple 3.3

L'assertion " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ " est complète (et vraie), de même que " $3 < 7$ ".

Par contre, l'assertion " $x^2 \geq 0$ " n'est pas complète, car elle dépend de la variable x . Or il n'y a aucune précision sur x , de ce fait on ne peut pas dire si cette assertion est vraie ou fausse.

ATTENTION : Lorsqu'un calcul, une preuve ... fait intervenir des variables, on précisera TOUJOURS à l'aide de quantificateurs à quels ensembles les variables appartiennent.

Remarque 3.3. On retiendra que :

Pour montrer qu'une proposition du type « $\forall x \in I, P(x)$ » est **fausse**, il **suffit de trouver un contre-exemple**, c'est à dire une valeur de x telle que la proposition $P(x)$ ne soit pas vérifiée.

Pour montrer qu'une proposition du type « $\exists x \in I, P(x)$ » est vraie, il suffit de trouver une valeur de x telle que la proposition $P(x)$ soit vérifiée.

3.2 Connecteurs logiques

3.2.1 Connecteurs logiques et opérations

Définition 3.4 Le connecteur logique « et »

Soient P et Q deux propositions.

L'assertion « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie.

L'assertion « P et Q » est fausse sinon.

Exemple 3.4

Si P est l'assertion « Cette carte est un as » et Q l'assertion « Cette carte est un cœur » alors l'assertion « P et Q » est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

Définition 3.5 Le connecteur logique « ou »

Soient P et Q deux propositions.

L'assertion « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie.

L'assertion « P ou Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

Exemple 3.5

Si P est l'assertion « Cette carte est un as » et Q l'assertion « Cette carte est un cœur » alors l'assertion « P ou Q » est vraie si **la carte est un as** ou bien **la carte est un cœur** ou bien **la carte est l'as de cœur**.

Définition 3.6 La négation « non »

Soit P une proposition.

L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie. (On note aussi $\neg P$)

Exemple 3.6

Si P est l'assertion « Cette carte est un as » alors Non P est « **cette carte n'est pas un as** »

Définition 3.7 L'implication $\Rightarrow$

Soient P et Q deux propositions.

- La proposition $(P \Rightarrow Q)$ est vraie dès lors que si P est vraie, alors Q est vraie. On dit alors que P implique Q ou si P alors Q.
- Si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on dit que P est **une condition suffisante** pour avoir Q (dès qu'on a P, on a Q), et que Q est **une condition nécessaire** pour avoir P (si on n'a pas Q, on ne peut pas avoir P).
- L'implication $(Q \Rightarrow P)$ est appelée **réciproque** de $(P \Rightarrow Q)$.

Exemple 3.7

- Soit x un nombre entier différent de 2

P: x est premier, Q : x est impair, on a bien **$P \Rightarrow Q$** Mais l'implication contraire est fausse.

- **$\text{Non}(P \Rightarrow Q)$** est équivalent à **$P$ et $\text{non}(Q)$** .
Par exemple $(P \Rightarrow Q): (x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$, **$\text{Non}(P \Rightarrow Q): (x > 0 \text{ et } f(x) \leq 0)$**

Exercice 3.4

On note x un nombre réel. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

1. $(x = 3) \Rightarrow x^2 = 9$
2. $x^2 = 9 \Rightarrow (x = 3)$
3. $x^2 = 9 \Rightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -3)$
4. $(x > 3) \Rightarrow x^2 > 9$
5. $(x < -3) \Rightarrow x^2 > 9$

Définition 3.8 L'équivalence $\Leftrightarrow$

Soient P et Q deux propositions.

- La proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie dès lors que P et Q sont simultanément vraies.
- Si **$(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie** on dit que
« **P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q** » car pour que Q soit vraie il faut et il suffit que P soit vraie.
- **$P \Leftrightarrow Q$** peut aussi s'exprimer par « **P est vrai si et seulement si Q est vrai** ».
Ou encore « **P est équivalent à Q** » ou enfin « **P équivaut à Q** ».
- **$(P \Leftrightarrow Q)$ est équivalent à $(P \Rightarrow Q \text{ ET } Q \Rightarrow P)$**

Exercice 3.5

Dire à chaque fois quel type de condition est P pour Q.

1. P : « Avoir son bac » et Q : « Etre admis en ECG ».
2. P : « Avoir un frère » et Q : « Ne pas être enfant unique ».
3. P : « Avoir le droit de passer le permis » et Q : « Avoir au moins 17 ans ».

Exemple 3.8

L'implication $\forall x \in \mathbb{R}, « x = x^2 » \Rightarrow « x \geq 0 »$ est vraie, mais l'implication réciproque est fausse donc il n'y a pas équivalence

Par contre, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 2) \Leftrightarrow (x + 3 = 5)$

Propriété 3.1

L'implication $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à l'implication suivante : $(\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$. Cette implication est appelée **contraposée** de $(P \Rightarrow Q)$.

Exemple 3.9

La contraposée de la proposition : « s'il pleut alors le sol est mouillé » est
« si le sol n'est pas mouillé alors il ne pleut pas ».

Exercice 3.6 Donner les contraposées des implications suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R} (x \leq 0) \Rightarrow (e^x \leq 1)$
2. Si deux droites distinctes sont parallèles, alors elles n'ont pas de point d'intersection.

Remarque 3.4

Cette propriété nous donne un outil supplémentaire pour démontrer une implication. On peut par exemple raisonner par contraposée.

Exercice 3.7

Soient a et b deux entiers.

Montrer que si le produit ab est un entier impair alors a et b sont impairs .

3.2.2 Règles relatives aux connecteurs logiques

- **La négation**

Propriétés 3.2

1. La négation “échange” les quantificateurs :

Non($\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$) est équivalent à $(\exists x \in \mathbb{R}, \text{non}(P(x)))$

Non($\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$) est équivalent à $(\forall x \in \mathbb{R}, \text{non}(P(x)))$

2. **Non(non $P(x)$) c'est $P(x)$**

Exemple 3.10

Pour un dé lancé, on considère

P : « le numéro sorti est pair » et

Q : « le numéro sorti est supérieur ou égal à 3 ». On a alors:

- non(P) : « le numéro sorti est impair ».
- non(Q) : « le numéro sorti est strictement inférieur à 3 ».

Exercice 3.8

Dans chacun des cas suivants, écrire avec des quantificateurs la négation de la proposition donnée.

1. Soit x un réel. P est « $x \geq 5$ ».
2. P est « La fonction réelle f est paire ».
3. P est « La fonction réelle f est majorée ».
4. P est « $0 \leq x < 1$ ».

- **Le *ou* et le *et***

Proposition 3.1

Soient P , Q et R trois propositions. Alors on a :

1. **Distributivité :** $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R))$ est équivalent à $((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$

$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \text{ est équivalent à } ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$$

2. **Lois de Morgan:**

$$\text{Non}(P \text{ ou } Q) \text{ est équivalent à } (\text{non } P \text{ et non } Q)$$

$$\text{Non}(P \text{ et } Q) \text{ est équivalent à } (\text{non } P \text{ ou non } Q)$$

Exemple 3.11

La négation de l'énoncé $(x > 0 \text{ et } x < 1)$ est $(x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1)$

3.3 Différents types de raisonnement

3.3.1 Raisonnement direct

Méthode 3.1

**Pour démontrer l'implication " $P \Rightarrow Q$ ", on écrit : "Supposons P (et montrons Q)."
Puis on effectue les étapes nécessaires afin d'établir Q .**

Remarque 3.5

Lorsqu'on rédige, les variables utilisées doivent être introduites. En particulier, la réponse à une question du type "Démontrer que pour tout réel x ..." ou "prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, \dots$ " commencera par "Soit $x \in \mathbb{R}$ ".

Exercice 3.9

Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}$

3.3.2 Raisonnement par disjonction de cas

Méthode 3.2

On souhaite vérifier une assertion $P(x)$ **pour tous les x dans un ensemble E** .

Soit $A \subset E$, une partie de E liée à l'assertion. On va alors montrer l'assertion pour :

- les $x \in A$,
- puis pour les $x \notin A$.

C'est la méthode de *disjonction de cas* ou du *cas par cas*.

Exemple 3.12

On veut par exemple montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est pair.

- cas 1 : **Soit n est pair** et $n=2p$ avec p dans $\mathbb{N}$, on a
 $n(n+1) = 2p(2p+1) = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire **$n(n+1)$ pair**.
- cas 2 : **Soit n est impair** et $n=2p+1$ avec p dans $\mathbb{N}$, on a
 $n(n+1) = (2p+1)(2p+2) = 2(p+1)(2p+1) = 2r$, r dans $\mathbb{N}$ soit à nouveau **$n(n+1)$ pair**

donc on a montré que dans tous les cas $n(n+1)$ est pair soit $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est pair.

3.3.3 Raisonnement par contraposée

Méthode 3.3

Démontrer " $P \Rightarrow Q$ " est équivalent à démontrer " $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ ", sa contraposée.

Exercice 3.10

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair.

3.3.4 Raisonnement par l'absurde

Méthode 3.4

Raisonnement par l'absurde, c'est supposer le contraire de ce que l'on veut établir afin d'arriver à une **contradiction**. Comme une assertion est soit vraie, soit c'est son contraire qui l'est; cela prouvera que l'assertion initiale est vraie.

Exemple 3.13

On va démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}=0$, alors $a=b=0$.

Raisonnons par l'absurde. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}=0$

Supposons alors que $\text{non}(a=b=0)$ i.e. que: $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Alors, nécessairement $b \neq 0$ car si $b=0$ alors on devrait aussi avoir $a=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $(a,b) \neq (0,0)$. Comme $a+b\sqrt{2}=0$ alors, en divisant par b qui est non nul, on obtient $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux.

L'hypothèse de départ est donc fausse, et on a : $a=b=0$.

3.3.5 Raisonnement par double implication

Méthode 3.5

Pour prouver **une équivalence**,
on peut prouver séparément les deux implications, **directe et réciproque**.

Exemple 3.14

Soit x un nombre réel. L'équivalence $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2)$ est vraie

Nous allons utiliser une double implication.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$: Supposons que $x^2 = 4$. On a alors : $x^2 - 4 = 0$

Par conséquent, $(x - 2)(x + 2) = 0$ soit $x = 2$ ou $x = -2$

$\Leftarrow$: Réciproquement, supposons que $x = 2$ ou $x = -2$. On a alors, en élevant au carré :

- si $x = 2$ alors $x^2 = 4$;
- si $x = -2$ alors $x^2 = 4$;

En conclusion, $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2)$

Exercice 3.11

Démontrer l'équivalence suivante : $(\sqrt{a} = b) \Leftrightarrow (a = b^2 \text{ et } b \geq 0)$

3.3.6 Raisonnement par contre-exemple

Méthode 3.6

Pour démontrer qu'une proposition du type " $\forall x \in E, P(x)$ " est fausse il suffit de donner un exemple de x qui ne convient pas.

Exemple 3.15

On veut montrer que la fonction $f: x \mapsto x + 1$ n'est pas paire. Or une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est paire si et seulement si " $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ ", comme $f(-1) \neq f(1)$ alors f n'est pas paire

3.3.7 Raisonnement par récurrence

Récurrence simple

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n . Si :

- **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie pour un certain entier n_0
- **Hérédité** : Pour un entier naturel fixé $n \geq n_0$
Si $P(n)$ vraie alors $P(n+1)$ est vraie
- **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Méthode 3.7 Rédaction

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq n_0$, on a “.....”

Pour tout entier $n \geq n_0$, on pose $P(n)$: “.....”

- **Initialisation** : Donc $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $P(n)$ est vraie pour **un** entier naturel $n \geq n_0$ fixé à savoir “.....”.
On veut montrer que $P(n+1)$ reste vraie c'est-à-dire que “.....”.

situation 1 : Par hypothèse de récurrence on a donc

(Ou **situation 2**: On a.....or par hypothèse de récurrence donc)

On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang n_0 , elle est héréditaire, donc par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ c'est-à-dire “.....” pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 3. 16

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, 2^n \geq n$

Pour tout $n \geq 1$, on note $P(n)$: $2^n \geq n$

- **Initialisation** : $2^1 = 2$, or $2 \geq 1$ donc $2^1 \geq 1$ et $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $P(n)$ est vraie pour **un** entier naturel $n \geq 1$ fixé à savoir $2^n \geq n$
On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie aussi c'est-à-dire que $2^{n+1} \geq n+1$.
Par hypothèse de récurrence on a $2^n \geq n$ donc, comme $2 > 0$,
 $2 \times 2^n \geq 2 \times n$ soit $2^{n+1} \geq 2n$
Or $n \geq 1$ donc $n+n \geq n+1$ soit $2n \geq n+1$. On en déduit que $2^{n+1} \geq n+1$ et $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang n_0 , elle est héréditaire, donc par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ c'est-à-dire $2^n \geq n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Remarque 3.6 Attention ce raisonnement est souvent source d'erreurs donc:

- Avant de l'utiliser on vérifie qu'il n'existe pas de démonstration directe. Par exemple si au cours de l'hérédité on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence pour prouver $P(n+1)$ c'est que la propriété peut se démontrer de façon directe.
- Si la propriété à démontrer ne dépend pas d'un entier, la récurrence est impossible.
- Dans l'hérédité on écrit “pour un entier naturel $n \geq n_0$ fixé” (ne surtout pas écrire “pour tout...” car cela devient faux)

Exercice 3.12

Montrer que pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$ où a est un réel strictement positif

Récurrance forte

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n . Si:

- **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie pour un certain entier n_0
- **Hérédité** : Pour un entier naturel fixé $n \geq n_0$
Si $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)$ vraies alors $P(n+1)$ vraie
- **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Méthode 3.8 Rédaction

Montrons par **récurrance forte** que pour tout entier $n \geq n_0$, on a “.....”

Pour tout entier $n \geq n_0$, on pose $P(n)$: “.....”

- **Initialisation** : Donc $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)$ sont vraies pour un entier naturel fixé $n \geq n_0$. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie aussi c'est-à-dire que “.....”.

Par hypothèse de récurrance on a donc

(Ou On a.....or par hypothèse de récurrance donc).

On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang n_0 , elle est héréditaire, donc par le principe de **récurrance forte** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ c'est-à-dire “.....” pour tout entier $n \geq n_0$.

ATTENTION : On ne peut pas remplacer une récurrance forte par une récurrance simple.

Remarque 3.7

Dans la récurrance forte seule l'étape d'hérédité change par rapport à la récurrance simple.

Exemple 3.17

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$

Montrons par récurrance forte que $\forall n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $P(n)$: $u_n = 2^{n-1}$

- **Initialisation** : $2^{1-1} = 2^0 = 1$, or $u_1 = u_0 = 1$ donc, $u_1 = 2^{1-1}$ et $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $P(1), P(2), \dots, P(n)$ sont vraies pour un entier naturel fixé $n \geq 1$. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie aussi c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2^n$.

On a $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$.

Or Par hypothèse de récurrance $u_i = 2^{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc

$$u_{n+1} = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 1 + \frac{1-2^n}{1-2} = 1 - 1 + 2^n = 2^n$$

On en déduit que $u_{n+1} = 2^n$ et $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang n_0 , elle est héréditaire, donc par le principe de récurrance $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ c'est-à-dire que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$

Récurrance double

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n . Si:

- **Initialisation** : $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies pour un certain entier n_0
- **Hérédité** : Pour un entier naturel fixé $n \geq n_0$
Si $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies alors $P(n+2)$ est vraie
- **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Méthode 3.9 Rédaction

Montrons par **récurrance double** que pour tout entier $n \geq n_0$, on a “.....”

Pour tout entier $n \geq n_0$, on pose $P(n)$: “.....”

- **Initialisation** : Donc $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : On suppose que **$P(n)$ et $P(n+1)$** sont vraies pour un entier naturel fixé $n \geq n_0$. On veut montrer que $P(n+2)$ reste vraie c'est-à-dire que “.....”.

Par hypothèse de récurrance on a donc

(Ou On a.....or par hypothèse de récurrance.....donc)
On en déduit que $P(n+2)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang n_0 et n_0+1 , elle est héréditaire, donc par le principe de **récurrance double** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ c'est-à-dire “.....” pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 3.8

Dans le cas d'une récurrance d'ordre 2, pour un entier n donné, on a besoin de $P(n)$ et de $P(n+1)$ pour établir $P(n+2)$.

Exercice 3.13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour $n \geq 0$.

Montrer que , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^{n+1}$