

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

LES FONCTIONS USUELLES

Sommaire

2.1 Généralités sur les fonctions

- 2.1.1 Ensemble de définition
- 2.1.2 Courbe représentative
- 2.1.3 Opérations sur les fonctions.
- 2.1.4 Composée de fonctions

2.2 Propriétés des fonctions

- 2.2.1 Parité et symétrie
- 2.2.2 Monotonie
- 2.2.3 Périodicité
- 2.2.4 Eléments remarquables
- 2.2.5 Position relative et régionnement du plan

2.3 Fonctions de référence

- 2.3.1 Fonctions carrée et fonction cube
- 2.3.2 Fonction inverse
- 2.3.3 Fonction racine carrée
- 2.3.4 Fonction logarithme népérien
- 2.3.5 Fonction exponentielle
- 2.3.6 Fonctions puissances
- 2.3.7 Fonction valeur absolue
- 2.3.8 Fonction partie entière

2.4 Dérivation: rappels du prébac

- 2.4.1 Formules de dérivations
- 2.4.2 Applications de la dérivation aux variations

2.1 Généralités sur les fonctions

2.1.1 Ensemble de définition

Définition 2.1

On appelle fonction un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble D associe un unique nombre y .

On note :

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ est appelé **l'image de x par f** , tandis que x est appelé **antécédent de $f(x)$ par f** .

Exemple 2.1

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$.

- L'image de 2 est $f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$.
- Les antécédents de 4 vérifient $f(x) = 4$ c'est-à-dire

$$2x + 3 = 4 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ L'antécédent de 4 est donc } \frac{1}{2}.$$

Définition 2.2

1. On appelle ensemble de définition d'une fonction f , noté D_f en général, l'ensemble de tous les nombres x où $f(x)$ est définie c'est-à-dire où l'on peut calculer $f(x)$.
2. Les nombres réels qui possèdent au moins un antécédent par f constituent l'ensemble image de f , que l'on note $f(D_f)$.

Exemple 2.2

1. La fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$ a pour ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x+3$ est calculable.

2. La fonction $g: x \mapsto \frac{1}{2x-4}$ a pour ensemble de définition: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ car g est définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $2x - 4 \neq 0$ i.e. $2x \neq 4$ donc $x \neq 2$.

3. La fonction $h: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ a pour ensemble de définition: $D_h =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ car h est définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 - 1 \geq 0$ i.e. $x \leq -1$ ou $x \geq 1$.

Exercice 2.1

Déterminer le domaine de définition de chacune des trois fonctions définies par:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4} \quad g(x) = \sqrt{1-x} \quad h(x) = \frac{4x-1}{\sqrt{2x+3}}$$

2.1.2 Courbe représentative

Définition 2.3

Soit f une fonction définie sur D_f et soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

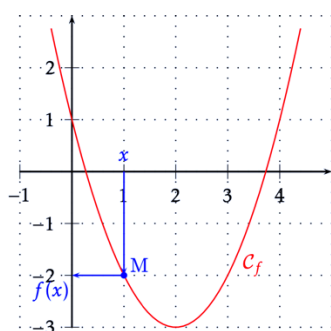


Figure 2.1

Notations : Elle est notée traditionnellement C_f ; $C_f = \{(x, f(x)) | x \in D_f\}$

Remarque 2.1

On a l'équivalence : Pour tout $x \in D_f$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$.

Exemple 2.3 Lecture graphique d'image et d'antécédents

Lecture d'image

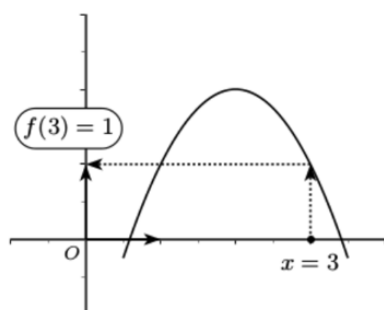
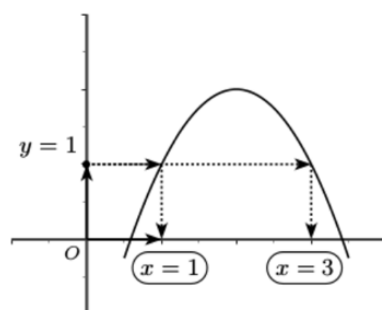


image de 3 par f ou $f(3) : 1$.

Lecture d'antécédent



antécédents de 1 par f ou solutions de $f(x) = 1 : 1$ et 3 .

2.1.3 Opérations sur les fonctions

Proposition 2.1

Soient f, g deux fonctions numériques définies sur le même ensemble I et λ un nombre réel :

1. La **somme** de f et de g est la fonction notée $f + g$ et définie sur I par :

$$\text{Pour tout } x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. Le **produit** de f et de g est la fonction notée $f.g$ et définie sur I par :

$$\text{Pour tout } x \in I, (f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

3. Le **produit du réel** λ par la fonction f est la fonction notée λf définie sur I par :

$$\text{Pour tout } x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$

4. Si de plus $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors le **quotient** de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ définie sur I par

$$\text{Pour tout } x \in I, \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exercice 2.2

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = x^4, g(x) = \sqrt{x}, h(x) = x^2 + 1$
 $D_f = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R}^+ \quad D_h = \mathbb{R}$.

Donner l'expression des fonctions suivantes : $f + g; f \times h; \frac{g}{h}$

2.1.4 Composée de fonctions

Définition 2.4 (Composée de fonctions)

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que $f(D_f) \subset D_g$.
La composée de la fonction f par g est la fonction, notée $g \circ f$ (qui se lit « g rond f ») est la fonction définie sur D_f par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exercice 2.3

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \sqrt{x}, h(x) = e^x$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R}^+ \quad D_h = \mathbb{R}$$

Donner l'expression des fonctions composées suivantes :

$$f \circ g, g \circ f, f \circ h, h \circ f, g \circ h, h \circ g$$

2.2 Propriétés des fonctions

2.2.1 Parité et symétrie

Définition 2.5

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si et seulement si pour tout $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
La courbe d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** (d'équation $x = 0$).

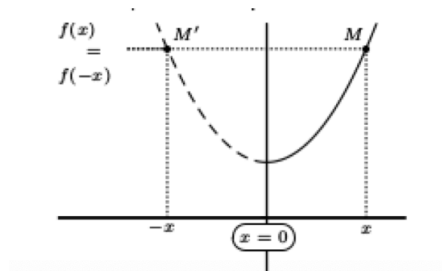


Figure 2.2

Définition 2.6

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est **impaire** si et seulement si pour tout $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
La courbe d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

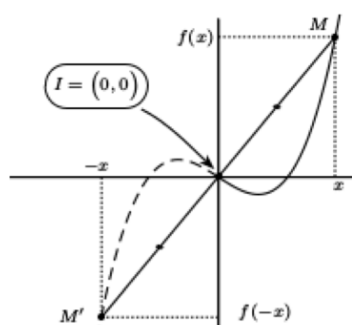


Figure 2.3

Remarque 2.2 Lorsque le domaine de définition D_f d'une fonction f vérifie la condition:
 $\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
on dit que le domaine de définition D_f est symétrique par rapport à zéro.

Exemple 2.4

- L'ensemble $] -\infty; -5[\cup]5; +\infty[$ est symétrique par rapport à zéro.
- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ est symétrique par rapport à zéro.
- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro.

Méthode 2.1 (Etude de la parité d'une fonction)

1. On commence par déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et on détermine si D_f est symétrique par rapport à zéro ou non. Si c'est le cas, on passe à la deuxième étape, et si ce n'est pas le cas, f n'est ni paire ni impaire.
2. Pour un x quelconque dans D_f , on compare $f(-x)$ avec $f(x)$ ou avec $-f(x)$:
 - si $f(-x) = f(x)$ alors la fonction f est paire,
 - si $f(-x) = -f(x)$ alors la fonction f est impaire,
 - Enfin, si on trouve un réel $x_0 \in D_f$ tel que $f(-x_0) \neq f(x_0)$ et $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ alors f n'est ni paire ni impaire.

Remarque 2.3

1. **Intérêt pratique d'une fonction paire ou impaire** : il suffit d'étudier la fonction f sur $[0, +\infty[\cap D_f$ (car par symétrie, on peut en déduire l'étude sur $] -\infty, 0] \cap D_f$).
2. Une fonction peut ne pas être paire ni être impaire.

Par exemple, la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x-2}$ n'est pas une fonction paire ou impaire car $D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ donc $-2 \in D_g$ mais $2 \notin D_g$.

Exemple 2.5

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{x^2+1}$. La fonction f est définie pour tout réel x par composée de fonctions usuelles définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$. Ce domaine est bien symétrique par rapport à 0. Calculons pour $x \in D_f$: $f(-x) = e^{(-x)^2+1} = e^{x^2+1} = f(x)$. Ainsi f est une fonction paire.

Exercice 2.4

Etudions la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x} \quad g(x) = \frac{x^5}{x^2 - 4} \quad h(x) = x^3 - x^2.$$

2.2.2 Monotonie

Définition 2.7

Soit I un intervalle sur lequel f est définie. On dit que :

• f est **croissante sur I** lorsque :

pour tout couple de nombres x_1 et x_2 appartenant à I , si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

f est **strictement croissante sur I** lorsque :

pour tout couple de nombres x_1 et x_2 appartenant à I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

• f est **décroissante sur I** lorsque :

pour tout couple de nombres x_1 et x_2 appartenant à I , si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

f est **strictement décroissante sur I** lorsque :

pour tout couple de nombres x_1 et x_2 appartenant à I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

• Une fonction est **monotone sur un intervalle I** si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.

Remarque 2.4

Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

La fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.5

- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.
- Il existe des fonctions qui ne sont pas monotones, c'est-à-dire qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Méthode 2.1 Inégalités

Partant d'une inégalité de départ valable sur un certain intervalle, on peut appliquer une fonction dont on connaît les variations sur cet intervalle afin de déduire une nouvelle inégalité.

Sauf cas évident, il faut toujours **justifier ces étapes** en précisant (si besoin en démontrant) les variations de la fonction sur l'intervalle en question.

En résumé : « **appliquer une fonction croissante ne change pas le sens de l'inégalité, appliquer une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.** ».

Exemple 2.6

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{(1-x)^2}$. La fonction f est définie pour tout réel x par composée de fonctions usuelles définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$. On va encadrer $f(x)$ sur l'intervalle $[2;4]$.

La fonction $x \mapsto (1-x)^2$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc sur $[2;4]$ et on a $1 \leq (1-x)^2 \leq 9$ d'où $e^1 \leq f(x) \leq e^9$ par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2.1 Opérations sur les fonctions monotones

Soient f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I .

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Si $\lambda > 0$, alors f et λf ont le même sens de variation;
 - Si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variations contraires.
2. Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) sur I , alors $f+g$ est croissante (resp. décroissante) sur I .
3. On suppose que $f \circ g$ est bien définie sur I .
 - Si f et g ont même monotonie sur I , alors $f \circ g$ est croissante sur I .
 - Si f et g ont des monotonies opposées sur I , alors $f \circ g$ est décroissante sur I .

Ces propriétés peuvent être utiles pour déterminer rapidement la monotonie de certaines fonctions dans des cas simples.

Exemple 2.7

Puisque les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^3 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur $] 0; +\infty[$.

De façon générale, nous utiliserons tout de même ce qui sera vu plus loin au paragraphe 2.4

2.2.3 Périodicité

Définition 2.8

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition. La fonction f est dite périodique lorsqu'il existe un réel T non nul tel que :

Pour tout $x \in D_f$ alors $x + T \in D_f$ et pour tout $x \in D_f$, $f(x + T) = f(x)$.

On dit alors que f est T -périodique et le réel T est appelé une période de f .

2.2.4 Eléments remarquables

Majorant, minorant

Définition 2.9

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que:

Pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.

On dit alors que M est un majorant de f sur I ou encore que le réel M majore la fonction f sur I .

On dit que la fonction f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que:

Pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

On dit alors que m est un minorant de f sur I ou encore que le réel m minore la fonction f sur I .

On dit que f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I et dans ce cas il existe un réel m et un réel M tel que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$.

Remarque 2.6

Graphiquement, une fonction f est majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) lorsque sa courbe représentative est située au-dessous (resp. au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = M$ (resp. $y = m$).

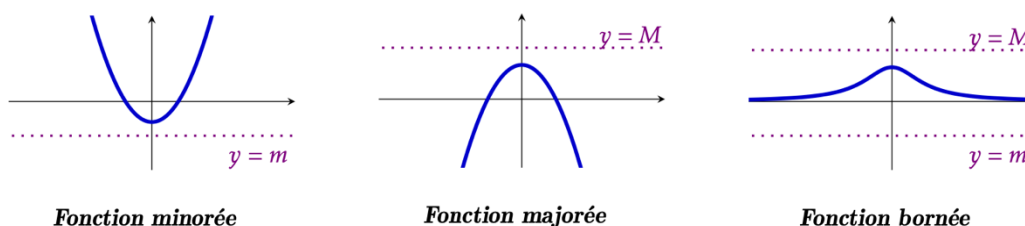


Figure 2.4

Exemple 2.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. En dressant le tableau de variation de f , on peut montrer que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) \leq 1$$

Ainsi, le réel $M=1$ est un majorant de f sur $\mathbb{R}$ mais $M'=3$ est un autre majorant de f sur $\mathbb{R}$.
De même, le réel $m=0$ est un minorant de f sur $\mathbb{R}$ mais $m'=-7$ est un autre minorant de f sur $\mathbb{R}$:

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad -7 \leq f(x) \leq 3$$

Maximum, minimum

Définition 2.10

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f admet un maximum en x_0 sur I lorsque:

$$x_0 \in I \text{ et pour tout } x \in I \text{ a } f(x) \leq f(x_0)$$

$$\text{On note alors } \max_{x \in I} f(x) = f(x_0)$$

On dit que la fonction f admet un minimum en x_0 sur I lorsque:

$$x_0 \in I \text{ et pour tout } x \in I \text{ a } f(x) \geq f(x_0)$$

$$\text{On note alors } \min_{x \in I} f(x) = f(x_0)$$

Un **extremum** de f sur I est soit un **maximum** soit un **minimum** de f sur I .

Remarque 2.7

Si $f(x_0)$ est un extremum sur un intervalle ouvert contenant x_0 , mais pas sur I tout entier, on dit que $f(x_0)$ est un extremum local.

Exemple 2.9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq f(0)$ avec $f(0) = 1$.
Donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 atteint en 0.

2.2.5 Position relative et régionnement du plan

Proposition 2.2

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. La courbe représentative de f est au-dessus de celle de g si et seulement si, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$.

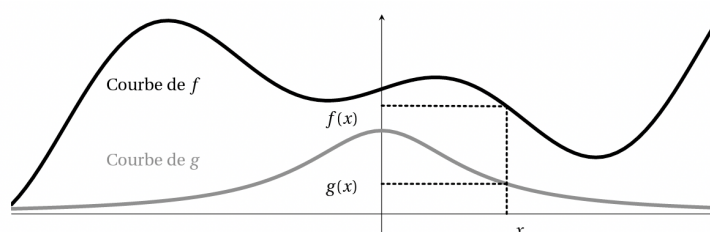
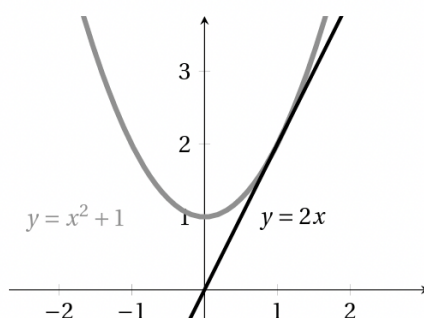


Figure 2.5

Exemple 2.10

— On a pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 2x$.



La courbe de $x \mapsto x^2 + 1$ est bien au-dessus de la droite d'équation $y = 2x$.

Donnons une preuve calculatoire en remarquant que la différence des deux membres de l'inégalité est positive

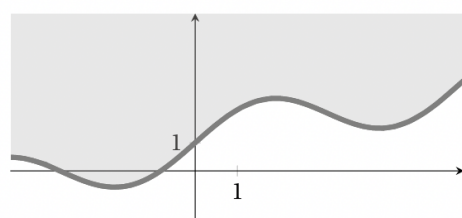
$$x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0.$$

Proposition 2.3

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $y \in \mathbb{R}$. Tous les points de coordonnées $(x; y)$ avec $x \in I$ sont situés au-dessus de la courbe représentative de f si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq y$.

Remarque 2.8

- L'énoncé reste valable avec des **inégalités strictes**
- Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on obtient une partition du plan en trois parties.



- La partie grisée correspond à l'ensemble des points $(x; y)$ pour lesquels $y > f(x)$.
- La courbe en noire correspond aux points $(x; y)$ vérifiant $y = f(x)$.
- Enfin, la partie en blanc sous la courbe correspond au point $(x; y)$ avec $y < f(x)$.

2.3 Fonctions de référence

2.3.1 Fonctions carré, trinôme et cube

La fonction carré

Théorème 2.1

La fonction carré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} +$
 $x \mapsto x^2$

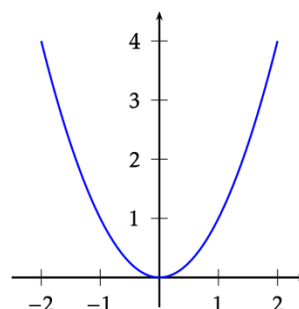


Figure 2.6

- est à valeurs positives ;
- est paire ;
- est strictement décroissante sur $] - \infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Remarque 2.9

Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, la fonction $x \mapsto x^{2n}$ est paire et est strictement décroissante sur $] - \infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété 2.2

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
2. $\forall x \in [0; 1], x^2 \leq x$.
3. $\forall x \geq 1, x \leq x^2$.

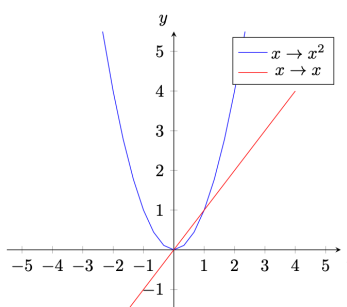


Figure 2.7

Les fonctions trinômes du second degré

Définition 2.11

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$. On dit que f est une **fonction polynôme de degré 2** ou encore **une fonction trinôme du second degré**.

Propriété 2.3

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$-\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	$-\infty$	$-\infty$
	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ est un maximum}$$

$a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$-\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ est un minimum}$$

Propriété 2.4

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

- La représentation graphique de la fonction polynôme f du second degré est une parabole, orientée vers le haut si $a > 0$ et orientée vers le bas si $a < 0$;
- La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

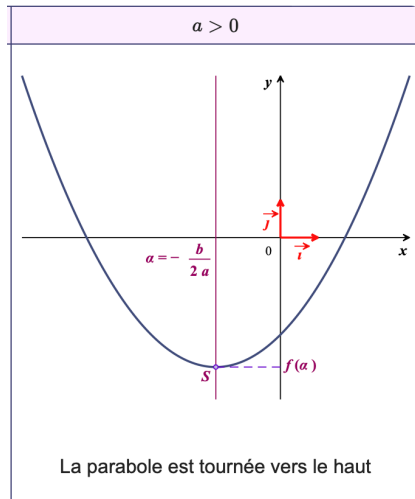


Figure 2.8

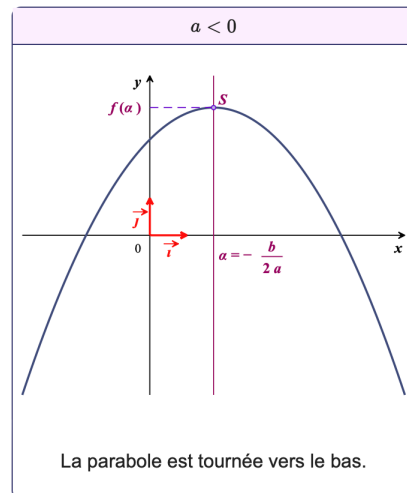


Figure 2.9

Propriété 2.5

La forme canonique de f est $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Exemple 2.11

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
Retrouver la forme canonique de la propriété 2.5

a est non nul, il est alors possible d'écrire

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

En imaginant que les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ sont le début d'une identité remarquable

$$(x + \dots)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

La fonction cube

Théorème 2.2

La fonction cube $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$

- est impaire ;
- est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}$.

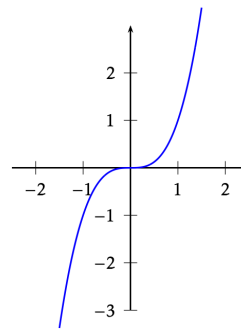


Figure 2.10

Remarque 2.10

Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, la fonction $x \mapsto x^{2n+1}$ est impaire et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.3.2 Fonction inverse

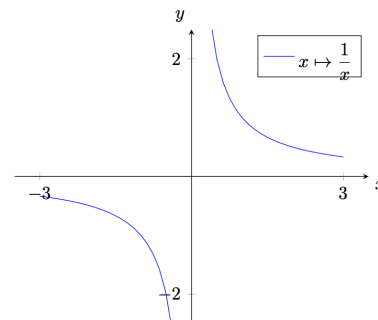
Définition 2.12

L'ensemble de définition de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Théorème 2.3

La fonction inverse $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

- est impaire sur $\mathbb{R}^*$
- est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$
- est strictement décroissante sur $] 0; +\infty[$
- n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^*$



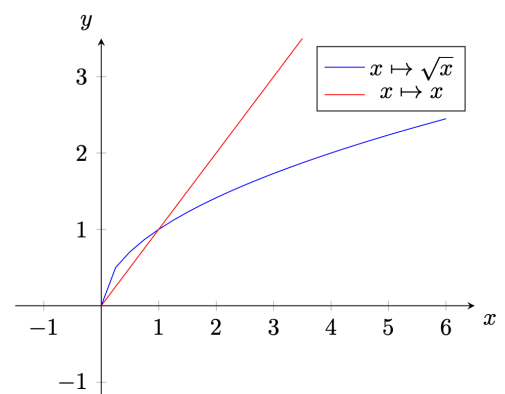
Exercice 2.5 Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{1}{-x^2+3x-2}$

Exercice 2.6 Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2-6x)(x^2-2x+1)}$

2.3.3 Fonctions racine carrée

Définition 2.13

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$
Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$



Exercice 2.7

- a. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.
- b. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Propriété 2.6

1. $\forall x \in [0; 1], \sqrt{x} \geq x$
2. $\forall x \geq 1, \sqrt{x} \leq x$

Proposition 2.4

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \geq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{x})^2 = x$.
3. **Attention**, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x^2} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-, \sqrt{x^2} = -x$.

ATTENTION

Lorsque x est strictement négatif, $(\sqrt{x})^2$ n'a aucun sens mais $\sqrt{x^2}$ en a un.

Proposition 2.5

Pour tous réels positifs x, y on a

1. $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$
2. $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (y \neq 0)$

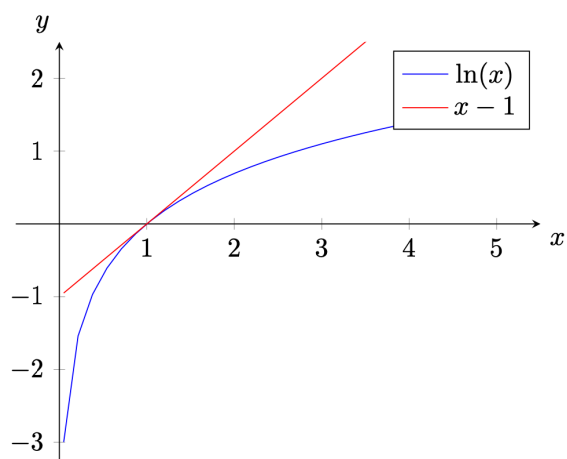
Remarque 2.11

Il n'y a **aucune** propriété pour les additions ou les soustractions.
Ainsi $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

2.3.4 Fonction logarithme népérien

Propriété 2.7

La fonction $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$. Elle est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$. De plus, $\ln(1) = 0$.



Propriété 2.8

1. La fonction logarithme est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ln(x) \leq x - 1$
3. *Signe de $\ln(x)$* : $\ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1]$ et $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$

Exercice 2.8

- a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$.
- b. Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)$.

La fonction $\ln$ possède des propriétés tout à fait remarquables, la première d'entre elles étant de transformer les produits en sommes.

Propriété 2.9 (A SAVOIR PARFAITEMENT)

1. $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \forall y \in \mathbb{R}_+^* \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \forall b \in \mathbb{R}_+^* \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z} \forall a \in \mathbb{R}_+^* \ln(a^n) = n \ln(a)$.
5. $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

ATTENTION

$$\frac{\ln(a)}{\ln(b)} \neq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \text{ et } \ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b).$$

Exercice 2.9

• Déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Pour celles qui sont fausses, les corriger de façon à les rendre juste.

$$a) \ln x \text{ existe ssi } x \geq 0 \quad b) \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad c) \ln(a+b) = \ln a + \ln b$$

Exercice 2.10 Soient x et $y > 0$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln(2x) - \ln(x)$

4. $2\ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$

2. $\ln(x^2) - \ln(x)$

5. $\ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

3. $\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

6. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

Exercice 2.11. Ecrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ le nombre $A = \ln\left(\frac{192}{108}\right)$

Exercice 2.12

1. Simplifier le nombre $B = 3\ln(3) - \ln\left(\frac{1}{9}\right)$
2. Simplifier le nombre $C = \frac{\ln(16) + \ln(8)}{10\ln(2) + \ln(4)}$

Exercice 2.13

1. Ecrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ le nombre $D = \ln(\sqrt{96})$
2. Pour quelles valeurs de x l'expression suivante est bien définie $\ln(x+3) + \ln(2x+1)$

Proposition 2.6

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$.

La stricte croissance de la fonction logarithme donne

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$.
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$.

Antécédents remarquables :

- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$ avec $e \simeq 2.718..$

Définition 2.14

L'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e : c'est la **constante de Neper**.
On a : $e \simeq 2,718$.

Notations

Plus généralement, pour tout y dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On convient de noter e^y cette solution car l'unique solution de l'équation $\ln(x) = n$ (avec $n \in \mathbb{Z}$) n'est autre que le nombre e^n . En effet :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(e^n) = n\ln(e) = n.$$

Exercice 2.14 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x+2) = 1$
2. $\ln(2x+1) > \ln(x^2+2)$
3. $3\ln(x) + \ln(x^2) < 5\ln(2)$
4. $\ln(x-1) + \ln(x^2-4) = \ln(4)$

Exercice 2.15 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x^2+2) = \ln(x+3)$
2. $\ln(\ln(x)) < 0$
3. $\ln(x^2-2) < 1$

2.3.5 Fonction exponentielle

Définition 2.15

La fonction exponentielle notée $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x.$$

Dans toute la suite, nous utiliserons indifféremment la notation e^x ou $\exp(x)$.

Propriété 2.10

La fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même.

Remarque 2.12

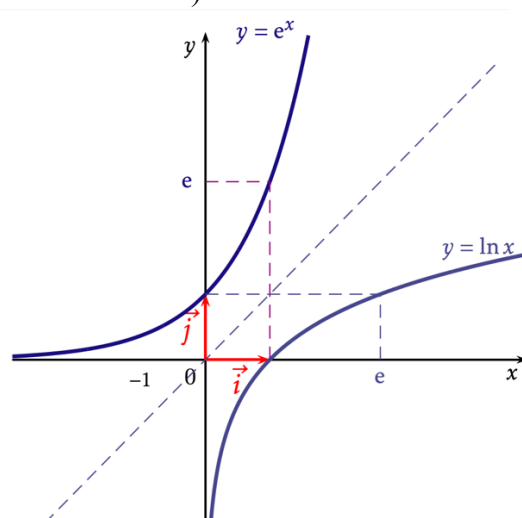
$\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.

Proposition 2.7

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
2. La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

Remarque 2.13

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite D d'équation $y = x$ (la première bissectrice).



Propriété 2.11

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

Conséquences :

- $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^a)^n = e^{an}$.

Remarque 2.14

En résumé, l'exponentielle a la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances (à l'inverse du logarithme qui transforme les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications).

Exercice 2.16

Soient x et y deux réels. Simplifier le plus possible les expressions suivantes:

1. $\frac{(e^x)^2}{e^x}$

3. $e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2$

2. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2$

4. $\frac{e^x}{e^y} \times e^{y-x}$

De la stricte croissance de l'exponentielle, on déduit la proposition suivante :

Proposition 2.8

Pour tous réels a et b :

- $e^a = e^b$ si, et seulement si, $a=b$.
- $e^a > e^b$ si, et seulement si, $a > b$.

Exercice 2.17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes:

1. $e^{2t-1} = 1$

2. $\ln(3x) = \frac{1}{2}$

3. $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

4. $e^{2x} e^{x^2} < 1$

2.3.6 Fonctions puissances

Définition 2.16

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction **puissance d'exposant** α , notée f_α , est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$, associe

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Exemple 2.12

Pour $\alpha = 2$, on a $f_2(x) = x^2$ et on retrouve la fonction carré.

Pour $\alpha = 3$, on a $f_3(x) = x^3$ et on retrouve la fonction cube.

Pour $\alpha = -1$, on a $f_{-1}(x) = \frac{1}{x}$ et on retrouve la fonction inverse.

α peut également prendre des valeurs non entières. Par exemple,

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = x^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2} \ln(x)},$$

ou bien

$$f_{\sqrt{2}}(x) = x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln(x)}.$$

Attention

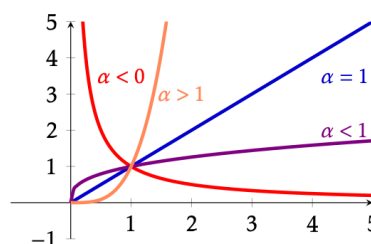
L'écriture x^α est une notation. Pour étudier une telle fonction, il faudra toujours repasser à son écriture exponentielle $e^{\alpha \ln x}$.

Propriété 2.12

La fonction f_α est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ si $\alpha > 0$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ si $\alpha < 0$.

Représentation graphique

Voici les différentes allures de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.



Propriété 2.13

La fonction racine carrée coïncide avec la fonction puissance $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Soit $x > 0$. Alors $x^{\frac{1}{2}} > 0$ et $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2} \times 2} = x^1 = x$ donc $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Proposition 2.9

Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Alors:

- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$
- $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

► Les règles de calcul restent les mêmes que dans le cas de puissances entières, excepté qu'elles ne sont valables que pour des réels **strictement positifs**.

Exercice 2.18

1. Résoudre l'équation $x^{\frac{2}{3}} = 2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0.99^n > 0.5$ en sachant que $\frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99)} \simeq 68,97$.

2.3.7 Fonction valeur absolue

Définition 2.17

La fonction valeur absolue, notée $x \mapsto |x|$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Exemple 2.13

$|2.9| = 2.9$ mais $|-5.2| = 5.2$. Il est clair que: $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$.

Exemple 2.14

1. Ecrire sans valeur absolue les nombres suivants $|\sqrt{2} - 1|$ et $|\pi - 5|$

On sait que $\sqrt{2} \simeq 1.41$ donc $\sqrt{2} - 1 > 0$ ainsi $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$.

On sait que $\pi \simeq 3.14$ donc $\pi - 5 < 0$ ainsi $|\pi - 5| = 5 - \pi$.

2. Ecrire sans valeur absolue et en fonction de x les nombres suivants :

(a) $|x - 2| = x - 2$ si $x \geq 2$ ou $|x - 2| = 2 - x$ si $x \leq 2$.

(b) $|x - 1| + |x + 2|$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$ x - 1 $		$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$
$ x + 2 $		$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$ x - 1 + x + 2 $		$-2x - 1$	3	$2x + 1$

Proposition 2.10

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \sqrt{x^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |-x| = |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \max(x, -x)$

Exercice 2.19

Démontrer les propriétés ci-dessus

Proposition 2.11. Inégalité triangulaire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

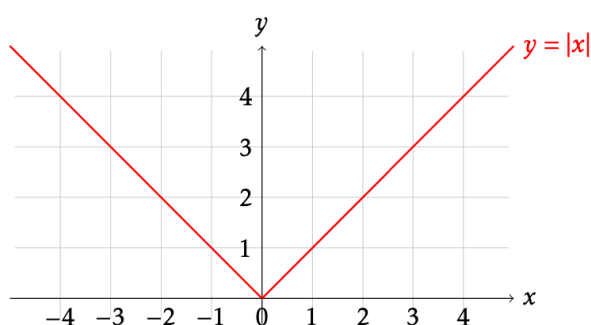
Attention ! Bien noter qu'en général, $|x + y| \neq |x| + |y|$!

Par exemple $|1 + (-2)| = 1, |1| + |-2| = 1 + 2 = 3$.

Proposition 2.12

La fonction valeur absolue est une fonction paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction valeur absolue:



Proposition 2.13

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|x|$ est la distance entre le point origine O d'un axe gradué et d'un point M d'abscisse x

Proposition 2.14

Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Alors $|x - y|$ est la distance entre le point M d'abscisse x et le point N d'abscisse y d'un axe gradué.

Proposition 2.15

- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = a \Leftrightarrow (x = -a \text{ ou } x = a).$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| > a \Leftrightarrow (x < -a \text{ ou } x > a).$

Remarque 2.15

Les inégalités strictes de deux dernières propriétés de la Proposition 2.15 peuvent être remplacées par des inégalités larges.

Exercice 2.20

 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $|x + 2| = -6$
2. $|x + 2| = 6$

Exercice 2.21

 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $|x| > 3$
2. $|x + 1| < 4$

Proposition 2.16

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \quad |a| = |b| \Leftrightarrow (a = -b \text{ ou } a = b)$$

Exemple 2.15 Résoudre l'équation $|2x - 3| = |x + 1|$. D'après le résultat précédent, cette égalité implique que $2x - 3 = x + 1$ ou $2x - 3 = -x - 1$. Ainsi $x = 4$ ou $x = \frac{2}{3}$. L'équation possède donc deux solutions et $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$.

Propriété 2.14

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On a l'équivalence :

f est bornée sur I si, et seulement si, $|f|$ est majorée sur I

2.3.8 Fonction partie entière

Définition 2.18

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x , notée $[x]$ ou $E(x)$, l'entier relatif le plus grand qui est inférieur ou égal à x .

En clair, soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$n \leq x < n + 1 \Leftrightarrow [x] = n$$

La partie entière de x est donc l'unique entier relatif qui vérifie $n \leq x < n + 1$

Exemple 2.16

- $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$ et attention $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$
- $\lfloor e \rfloor = 2$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Propriété 2.15

Au vu de la définition, les propriétés de la partie entière sont pour tout réel x :

1. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ (la partie entière est un entier relatif)
2. $\lfloor x \rfloor \leq x$ (la partie entière est un entier relatif qui est inférieur ou égal à x)
3. $x < \lfloor x \rfloor + 1$ (la partie entière est le plus grand entier inférieur ou égal à x , donc l'entier suivant est strictement supérieur à x)

On retrouve donc l'encadrement :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Exercice 2.22

Vrai ou faux?

Justifier vos affirmations.

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
2. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
3. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.
4. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t - \lfloor t \rfloor$ est croissante.

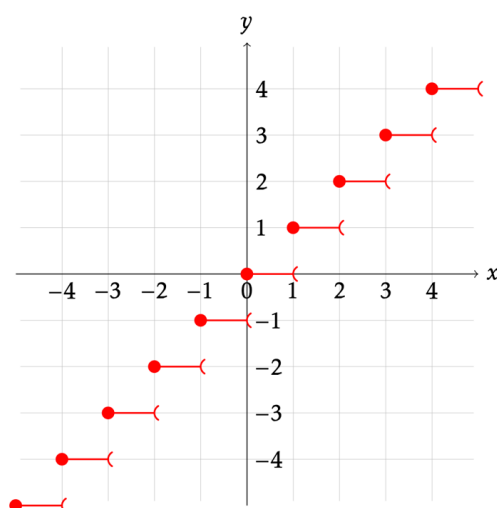
Exercice 2.23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x + 1 \rfloor = 7$

Propriété 2.16

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.16

La fonction partie entière n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$: en effet, elle est constante sur chaque intervalle $[n; n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$. Cela se traduit graphiquement par des « paliers » sur sa courbe, comme on peut le voir sur son graphe ci-dessous.



2.4 Dérivation : rappels du prébac

2.4.1 Formules de dérivations

Définition 2.19

- Le **taux de variation** de la fonction f entre a et x est le quotient : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- f est **dérivable** en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Définition 2.20

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I , alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé **fonction dérivée** de f sur I .

Proposition 2.17

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. La tangente (T_a) à la courbe C_f au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

D_f	Fonction f	Fonction f'	Ensemble de définition de f'
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Remarque 2.17

1. A noter que l'on a toujours $D_{f'} \subset D_f$, car pour parler de la dérivée de f en un point il faut que la fonction existe en ce point.
2. A l'exception de la fonction racine carrée, les autres fonctions usuelles citées ci-dessus sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Exemple 2.17

$$\rightarrow f(x) = \pi \quad f'(x) = 0$$

$$\rightarrow f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$$

$$\rightarrow f(x) = x^{2007} \quad f'(x) = 2007x^{2006}$$

Tableau des formules de dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I .

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u + v$	$u' + v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Division	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
Inverse	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
racine	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
exponentielle	e^u	$u' e^u$
logarithme	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exercice 2.24 Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leur ensemble de définition et préciser leur ensemble de dérivation :

1. $x \mapsto x^3 + x + 3$
2. $x \mapsto 3(x^2 + 4)$
3. $x \mapsto (-2x + 3)(5x - 3)$
4. $x \mapsto (2x - 7)^2$
5. $x \mapsto \frac{3x - 4}{x^2 + 3}$
6. $x \mapsto e^{2x+1}$ et donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 2 .
7. $x \mapsto \ln(-2x + 5)$
8. $x \mapsto 2x\sqrt{x}$.
9. $x \mapsto \frac{1}{x^3}$
10. $x \mapsto x^x$.

Exercice 2.25

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leur ensemble de définition et préciser leur ensemble de dérivation :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x \mapsto \frac{x+1}{3}$ 2. $x \mapsto \frac{1}{x} + \ln(x^2 + 1)$ 3. $t \mapsto e^{-t^2}$ 4. $x \mapsto x \ln(x)$. 5. $x \mapsto \sqrt{x+6}$. | <ol style="list-style-type: none"> 6. $x \mapsto \ln(x^2 + \sqrt{x} + 1)$ 7. $x \mapsto e^{\frac{2x+1}{x+2}}$ 8. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ 9. $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^3}$ 10. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ |
|---|--|

2.4.2 Applications de la dérivation aux variations

Théorème 2.4

Soit f une fonction définie et continue sur un **intervalle** I . Si

1. f' est nulle sur l'intervalle I , alors f est constante sur I .
2. $f' > 0$ sur l'intervalle I , alors f est strictement croissante sur I .
3. $f' < 0$ sur l'intervalle I , alors f est strictement décroissante sur I .

Remarque 2.18

Les deux derniers points restent vrais si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x , comme par exemple la fonction cube.



Attention, il est nécessaire de considérer **un intervalle** pour appliquer le théorème précédent, sinon il peut être faux, comme par exemple pour la fonction inverse sur son ensemble de définition.

Méthode 2.2 Inéquations fonctionnelles: **montrer une inégalité ou étudier un signe à l'aide d'une étude de fonction**

Lorsque les manipulations algébriques sur les inégalités ne suffisent plus, on utilise cette méthode très importante qui permet d'étudier un signe ou qui permet d'établir une inégalité:

1. Dans le cas où l'on doit établir une inégalité du type $A(x) \geq B(x)$, on pose $f(x) = A(x) - B(x)$ afin de se ramener à $A(x) - B(x) \geq 0$ c'est-à-dire à une étude de signe.
2. On étudie les variations de la fonction f (à l'aide du signe de la dérivée par exemple)
3. On place dans le tableau de variations toutes les valeurs pour lesquelles $f(x) = 0$.

Exercice 2.26

Montrer que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$

Exercice 2.27. Question type concours

Montrer que pour tout réel strictement positif x , $\ln(x) \leq x - 1$