

TD1 CALCULS ALGEBRIQUES

0. Ensembles

Exercice 1

Écrire les inégalités suivantes à l'aide d'intervalles

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1. $-3 < x \leq 5$ | 4. $3 \geq x \geq 1$ |
| 2. $10 > x$ | 5. $0 < x$ |
| 3. $x \geq -2$ | 6. $-1 \leq x < 1$ |

Exercice 2

Écrire les intervalles suivants à l'aide d'inégalités

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| 1. $x \in [-9; 2]$ | 4. $x \in]-\infty; 5[$ |
| 2. $x \in]0; 1[$ | 5. $x \in [-3; +\infty[$ |
| 3. $x \in]2; 6]$ | 6. $x \in [1; 10[$ |

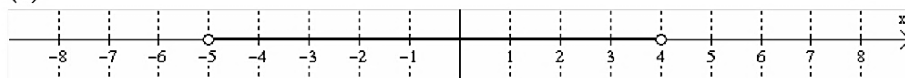
Exercice 3

Ecrire mathématiquement les ensembles suivants :

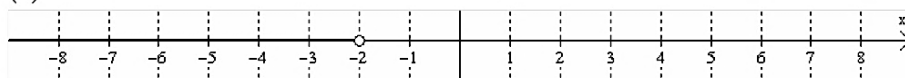
(1)



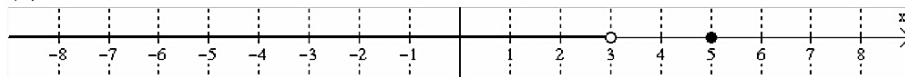
(2)



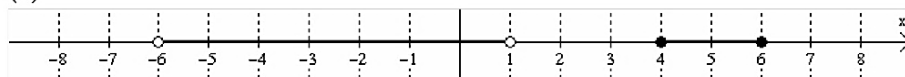
(3)



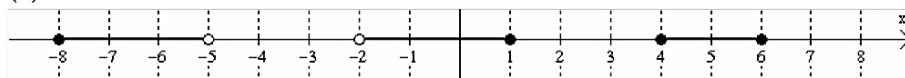
(4)



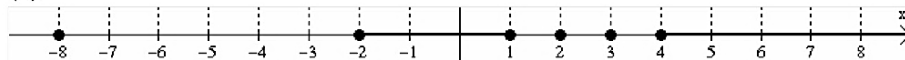
(5)



(6)



(7)



Exercice 4

1. Écrire en compréhension les ensembles suivants :

- | | |
|-------------------------------|--|
| (1) $[3, 8]$ | (5) $] -3, +\infty[\cup] -\infty, -8[$ |
| (2) $] -\infty, 7[$ | (6) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ |
| (3) $[-9, 4[$ | (7) $] -3, 0] \cup]1, 5]$ |
| (4) $]4, +\infty[\cup \{2\}$ | (8) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ |

2. Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants :

- (1) $A = \{x \in \mathbb{R} / x < 3 \text{ et } x > -3\}$
- (2) $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5 \text{ ou } x \leq 2\}$
- (3) $C = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x \leq 8 \text{ et } x \neq 6\}$
- (4) $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 3 \text{ ou } x = 3\}$
- (5) $E = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 6\}$
- (6) $F = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 7 \text{ ou } x > 10\}$
- (7) $G = \{x \in \mathbb{R} / x > 4 \text{ et } x < 2\}$

Exercice 5

Simplifier l'écriture des ensembles suivants. Aidez-vous au besoin d'une figure.

S'agit-il d'intervalles ?

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (1) $[1, 5] \cap]2, 6[$ | (8) $[-5, 3[\cap \{3\}$ |
| (2) $[1, 5] \cup]2, 6[$ | (9) $[-4, +\infty[\cup]-2, +\infty[$ |
| (3) $[3, +\infty[\cap]-\infty, 8[$ | (10) $[-4, +\infty[\cap]-2, +\infty[$ |
| (4) $[3, +\infty[\cup]-\infty, 8[$ | (11) $] -\infty, 8[\cap \mathbb{N}$ |
| (5) $[-3, -2] \cup]-2, 8[$ | (12) $[-6, 8[\cup]4, 12] \cup]-12, 3[$ |
| (6) $[-3, -2] \cap]-2, 8[$ | (13) $[-6, 8[\cap]4, 12] \cap]-12, 3[$ |
| (7) $[-5, 3[\cup \{3\}$ | |

1. CALCULS DANS $\mathbb{R}$

Exercice 6

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

- a) $A = \frac{2}{3n^2} - \frac{5}{9n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ b) $B = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+2} + \frac{7}{x^2-4}$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2; 0\}$
- c) $C = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$ d) $D = \frac{1}{2x-1} - \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{4x-2}$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; \frac{1}{2}\}$

Exercice 7

Ecrire sous la forme $3^p \cdot 2^q$ (p, q dans $\mathbb{Z}$)

$$A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3$$

$$B = \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3}$$

$$C = \frac{3^2 \times 16^n}{8 \times 9^n}$$

$$D = \left(\frac{9^n}{8}\right)^2$$

$$E = 0.25$$

$$F = \sqrt{2^{2n} \times 81^n}$$

$$G = \frac{\sqrt{8^n \times 27^{4n+2}}}{\sqrt{2}^n}$$

Exercice 8

1°) Calculer $(-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4$. Que remarque-t-on ?

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier les expressions suivantes :

$$A = (-1)^{2n}$$

$$B = (-1)^{2n+1}$$

$$C = (-1)^{n-1} + (-1)^n + (-1)^{n+2}$$

$$D = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+2}$$

Exercice 9

Soient x, y deux réels non nuls. Simplifier au maximum les expressions ci-dessous en écrivant les nombres sous la forme $x^n y^p$ avec n et p entiers relatifs

$$A = [(x^2 y^3)^4]^5$$

$$B = (x^3 y^{-4})^2 \cdot (-2x^{-5} y^6)^3$$

$$C = \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{4y}\right)^3 \cdot \left(\frac{y^2}{x}\right)^2$$

Exercice 10

Encadrer par deux entiers consécutifs $\sqrt{17}$. Donner alors le signe de $6 - \sqrt{17}$ et celui de $4 - \sqrt{17}$.

Exercice 11

Ecrire les expressions ci-dessous sans racines carrées au dénominateur et en simplifiant au maximum leur écriture:

$$1^\circ) A = \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} + \frac{2 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$$

$$2^\circ) B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}$$

Exercice 12

Simplifier les expressions ci-dessous après avoir considéré leur carré :

$$A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$B = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

Exercice 13

Soient x, y deux réels tels que $0 \leq y \leq x$

$$1^\circ) \text{ Calculer l'expression } \sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$2^\circ) \text{ En déduire que } \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}}$$

Exercice 14

1°) Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= (x^3 + x^2 + x + 1)(1 - x) & B &= (2x - 3)^2 - (3x + 4)^2 & C &= (4x - 1)^3 \\ D &= (a + b + c)^2 \text{ où } a, b, c \text{ réels} & E &= (x^2 + x + 2)^2 \end{aligned}$$

2°) Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (x - 5)(4x + 3x^2) - (x^2 + 1)(3x - 15)$$

$$B = (6x - 1)^3 - 12x + 2$$

$$C = 16 - x^2 + 3x - 12$$

2. ORDRE DANS $\mathbb{R}$

Exercice 15

1. Sachant que $2 \leq x \leq 3$, déterminer si c'est possible un encadrement des nombres suivant :

$$(a) 7x + 3, \quad (b) -x + 1 \quad (c) \frac{x+1}{x-1}, \quad (d) x^2, \quad (e) 3 - x^2,$$

2. Sachant que $-1 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y \leq 3$, déterminer un encadrement des nombres suivants :

$$(a) x + 2, \quad (b) 2y + 1, \quad (c) (x + 2)(2y + 1), \quad (d) (x + 2) - (2y + 1).$$

Exercice 16

1) a) Encadrer “à la main” $x^2 + x + 1$ pour $x \in [-1, 0]$.

b) On admet que l'on n'a pas obtenu le meilleur encadrement possible.
Trouver un meilleur encadrement en effectuant une transformation canonique du trinôme.

2) Encadrer “à la main” $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ pour $x \in [-1, 0]$.

3. EQUATIONS.INEQUATIONS

Exercice 17

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$1. 3(x - 3) + 5 = 5 \left(\frac{x}{2} - \frac{4}{3} \right)$$

$$2. 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$3. (x - 1)^2 = -7^2$$

$$4. (x - 9)^2 = (-3)^2$$

$$5. \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$6. (2x + 3)(3x + 5)(7 - x^2) = 0$$

$$7. 2x(x + 1)^2 = (1 - 3x)(x + 1)^2$$

$$8. (x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2$$

$$9. \frac{2x - 1}{x^2 + 1} = 2$$

Exercice 18

Discuter et résoudre suivant les valeurs de m l'équation suivante $x^2 + 3x - m = 0$

Exercice 19

Discuter et résoudre suivant les valeurs de m l'équation suivante $mx^2 - 2mx + 2 = 0$

Exercice 20

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $X^2 + X - 6 = 0$

2°) En déduire la résolution des équations :

a) $x^4 + x^2 - 6 = 0$ b) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x + 6 > 4(x + 1)$

6. $2x(x+1)^2 < (1-3x)(x+1)^2$

10. $\frac{x-3}{x+2} + 4 < \frac{5x}{x+2}$

2. $2x^2 - 3x + 2 < 0$

7. $x^3 + 3x \leq 3x^2 + 1$

11. $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} < \frac{2x-6}{2}$

3. $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$

8. $\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+4} \geq 0$

12. $(x-2)^2 < 4$

4. $-x^2 - 3x + 9 > 0$

9. $\frac{x+2}{x^2-1} > \frac{3}{x-1}$

5. $(2x+1)(x+7)(x-3) \geq 0$

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1°) $\sqrt{x-4} = 2$ 2°) $\sqrt{x^2+9} > 5$ 3°) $\sqrt{x^2+3x+1} = 2x+1$