

TD 2 FONCTIONS USUELLES

1. Généralités sur les fonctions

Exercice 1 Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

4. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x - 6)$

5. $f : x \mapsto \ln(x + 3) - \ln(2x + 1)$

6. $f : x \mapsto \sqrt{x^3 + x^2 + x}$

7. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{-x+4}}$

8. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x) - 1}$

9. $f : x \mapsto \ln(e^x - 1)$

10. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x+1)}$

Exercice 2 Composition

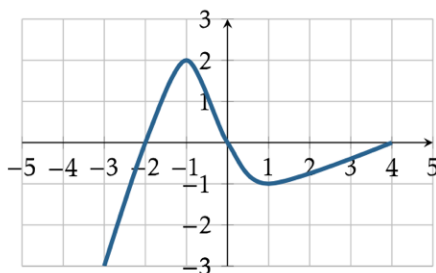
Donner les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ en précisant leur ensemble de définition ainsi que leurs sens de variations :

a) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.

Exercice 3 Autour des courbes...

Considérons f la fonction définie sur $[-3;4]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous et représenter sa courbe sur le même graphique.

- $g : x \mapsto f(-x)$
- $h : x \mapsto -f(x)$
- $i : x \mapsto |f(x)|$
- $j : x \mapsto f(x+2)$
- $k : x \mapsto f(x-1)$

2. Propriétés des fonctions

Exercice 4 Parité

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f .

1.a. $f : x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$

1.b. $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$

1.c. $f : x \mapsto e^{x^2}$

1.d. $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$

1.e. $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$

1.f. $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$

1.g. $f : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$

2. Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Mêmes questions avec le produit de deux fonctions.
3. Démontrer qu'une fonction polynômiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.

Exercice 5 Fonctions ln et exp

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$: $\ln(8)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(6) - \ln(3)$; $\ln(2e^2)$.
2. Simplifier (x désigne un réel quelconque) :

2.a. $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}$

2.b. $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$

2.c. $e^{2 \ln x}$

2.d. $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.e. $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2.f. $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$

2.g. $\ln(e^2 \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

2.h. $\frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}$

2.i. $\sqrt{e^{2x}} e^{-x}$

2.j. $\frac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$

Exercice 6 Fonctions puissances

On suppose que $x > 0$.

Mettre sous forme exponentielle : 2^x ; x^3 ; x^y .

3. Equations et inéquations avec des fonctions usuelles

Exercice 7 Avec ln et exp

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(1 + e^x) - 2 = 0$

2. $\ln(2x) \leq 1$

3. $\ln(2 - x^2) < 0$

4. $(\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0$.

5. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

6. $\ln(x+3) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3))$.

Exercice 8 Avec des fonctions usuelles

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|-------------------------|
| 1. $\sqrt{1 - \ln(x)} = 5$ | 6. $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$ | 11. $\ln(10 - x^2) > 0$ |
| 2. $ \ln(x) = 1$ | 7. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$ | 12. $2^x \leq 3$ |
| 3. $ e^x = 1$ | 8. $ x + 5 < 3$ | |
| 4. $ x + 3 = -1$ | 9. $ x - 2 \leq 0$ | |
| 5. $ x + 5 = 2x - 7 $ | 10. $ 2x - 1 \geq 4$ | |

4. Dérivation. Etude de fonctions

Exercice 9 Dérivation

Justifier que chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle donné et déterminer sa dérivée.

- | | |
|---|--|
| 1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ | 6. $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$ |
| 2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^7}$ sur $]0; +\infty[$ | 7. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ |
| 3. $f : x \mapsto x \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ | 8. $f : x \mapsto \sqrt{x} e^x$ sur $]0; +\infty[$ |
| 4. $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$ | 9. $f : x \mapsto (\ln(1 + x))^4$ sur $\mathbb{R}^+$ |
| 5. $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$ | 10. $f : x \mapsto x e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ |

Exercice 10 Etude de fonctions

Dans chacun des cas, préciser l'ensemble de définition puis étudier ses variations :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2} & g(x) &= \ln(e^x - 3) & h(x) &= \frac{1}{x} + e^{-2x+3} \\ j(x) &= x^{-\pi} & k(x) &= x^{\frac{1}{\sqrt{2}}} & l(x) &= x^{\ln(x)}. \end{aligned}$$

Exercice 11 Etude de fonction. Élément remarquable

Posons $f : x \mapsto 3x^3 + \frac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

1. Etudier les variations de f .
2. Vérifier l'existence d'un minimum dont on précisera la valeur.

Exercice 12 Fonction partie entière

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - [x]$.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$
2. Calculer $f(2,5)$ et $f(\frac{4}{3})$.
3. Pour $x \in [0;1[$, simplifier l'expression de $f(x)$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f .

Exercice 13 Fonction racine carrée . Élément remarquable

1. Etudier les variations de la fonction

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}.$$

2. En déduire que g admet un minimum sur $]1; +\infty[$ que l'on déterminera.

Exercice 14 Avec des valeurs absolues

Résoudre l'équation $|x - 3| + |x - 1| = (x - 2)^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5. Applications de l'étude de fonctions

Exercice 15 Application de l'étude de fonctions à l'encadrement

1. Encadrer les fonctions suivantes par les meilleurs réels possibles, sur les ensembles indiqués. $a(x) = 2x + 1$ sur $[0; 1]$; $b(x) = -x + 5$ sur $[-2; 1]$; $c(x) = e^x + e^{-x}$ sur $[-1; 1]$.
2. Encadrer les fonctions suivantes par les meilleurs réels possibles, sur les ensembles indiqués. Préciser si chaque réel trouvé est un majorant, un minorant, le minimum ou le maximum.

$$a(x) = x^2 \text{ sur } [-1; 2] \quad b(x) = \frac{1}{x(x-1)} \text{ sur }]0; 1[\quad c(x) = |x^2 - 1| \text{ sur } [-1; 2[$$

Exercice 16 Application de l'étude de fonctions à la comparaison de fonctions

1. Démontrer en justifiant chaque étape que $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.
2. Montrer que $\forall x \geq 1, \ln(x) \leq \sqrt{x}$.
3. Démontrer que $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x$ (**à retenir**) puis que $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
4. Soient a et b deux reels strictement positifs. On pose $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{b}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire que $\forall x > 0, \frac{a}{x} + \frac{x}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

6. Pour aller plus loin

Exercice 17 Adapté d'Ecricome 2003

On définit les fonctions ch et sh par : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{sh(x)}$

1. Étude des fonctions sh et ch

- Quels sont les ensembles de définition de ch et sh ?
- Étudier la parité de ch et sh .
- Étudier les variations de sh sur $\mathbb{R}$ puis déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
- Étudier les variations de ch .
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) > sh(x)$.
- Tracer sur un même graphique les allures de ch et sh .

2. Étude de la fonction f

- Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.
- On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = sh(x) - xch(x)$. Étudier les variations de g puis déduire son signe.
- En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

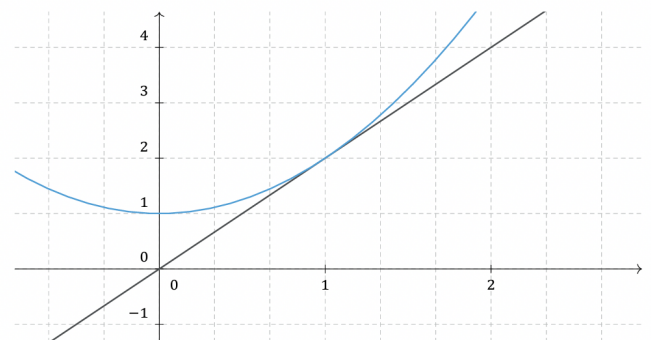
3. Quelques formules

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
- Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) = ch(a + b)$.

Exercice 18 Avec la fonction partie entière

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $[2x] = [x^2 + 1]$

On répondra grâce aux graphes ci-contre



Exercice 19 ESSEC 2014

Autour de la loi de Benford

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x , et $\{x\}$ sa partie fractionnaire : $\{x\} = x - [x]$. On note $\log z$ le logarithme en base 10 du réel $z > 0$. On a donc $\log z = \frac{\ln z}{\ln 10}$. On rappelle en particulier les propriétés suivantes, qu'on pourra utiliser sans démonstration

$$\begin{aligned}\forall z > 0, 10^{\log z} &= z \\ \forall z > 0, \forall z' > 0, \log(z \cdot z') &= \log z + \log z' \\ \forall a \in \mathbb{R}, \log(10^a) &= a\end{aligned}$$

On a par exemple $\log(100) = 2$, $\log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que pour tout réel x positif et non nul, on a

$$x = 10^{\{\log x\}} \cdot 10^{[\log x]}$$

Cette décomposition est dite *notation scientifique* de x .

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, le couple $(10^{\{\log x\}}, [\log x])$ est l'unique couple (α, n) dans $[1, 10[\times \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha \cdot 10^n$.

(c) Soit $x > 0$. On pose $\gamma = [10^{\{\log x\}}]$. Montrer que $\gamma \in \{1, 2, \dots, 9\}$.
 γ est appelé le premier chiffre significatif de x .