

CALCULS ALGEBRIQUES

Sommaire

1.1 Notions d'ensembles

1.1.1 Ensembles usuels

1.1.2 Intervalles

1.1.3 Appartenance et inclusion

1.1.4 Parties d'un ensemble

1.1.5 Opérations sur les ensembles

1.2 Calculs dans $\mathbb{R}$

1.2.1 Fractions de deux nombres réels

1.2.2 Puissance entière d'un nombre réel

1.2.3 Racine carrée d'un nombre réel positif

1.2.4 Identités remarquables

1.3 Ordre dans $\mathbb{R}$

1.3.1 Egalités

1.3.2 Inégalités

1.4 Résolution d'équations et d'inéquations

1.4.1 Equations

1.4.2 Inéquations

1.1 Notions d'ensembles

1.1.1 Ensembles usuels

On appelle ensemble une collection d'objets.

On appelle ces objets les éléments de l'ensemble.

On peut décrire un ensemble de deux façons différentes :

- En extension : cela revient à décrire les éléments qu'il contient : $E = \{1; 2; 3\}$
- En compréhension: cela revient à le définir à partir d'une condition: $E = \{x \in \mathbb{R} / x+5 \geq 0\}$.

Remarque 1.1

- L'ensemble ne contenant aucun élément est l'ensemble vide noté $\emptyset$
- Soient p et q deux entiers naturels alors $\llbracket p, q \rrbracket = \{n \in \mathbb{N}, p \leq n \leq q\}$
- $E \setminus \{x\}$ est l'ensemble E privé de x : c'est l'ensemble de tous les éléments de E sauf x .
- $E^* = E \setminus \{0\}$.
- Un ensemble à un seul élément x est noté $\{x\}$ et on l'appelle le singleton $\{x\}$.
Un ensemble à deux éléments est appelé une paire.

Définition 1.1

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs: $\mathbb{Z} = \{\dots - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs

$\mathbb{R}_-$ désigne l'ensemble des nombres réels négatifs

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Définition 1.2

- Un ensemble E qui possède un nombre fini d'éléments est appelé un ensemble fini.
Le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de E et noté $\text{card}(E)$.
- Si à chaque élément d'un ensemble E on peut faire correspondre un unique entier et réciproquement on dit que E est un ensemble dénombrable (cet ensemble a donc un nombre infini d'éléments).
- Les ensembles qui ne sont pas dans les deux premières catégories sont des ensembles non dénombrables.

Exemple 1.1

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$ comme par exemple $[1; 2]$ ne sont pas dénombrables.

1.1.2 Intervalles

Définition 1.3

L'ensemble des nombres réels compris entre deux nombres réels a et b est noté $[a; b]$. On résume dans le tableau ci-dessous tous les types d'intervalles :

Intervalle	Inégalité	Borné	Fermé/ouvert
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	Oui	Fermé
$]a; b]$	$a < x \leq b$	Oui	Ouvert à g., Fermé à d.
$[a; b[$	$a \leq x < b$	Oui	Fermé à g., ouvert à d.
$]a; b[$	$a < x < b$	Oui	Ouvert à g., ouvert à d.
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	Non	Fermé à g., ouvert à d.
$]a; +\infty[$	$x > a$	Non	Ouvert
$] -\infty; b]$	$x \leq b$	Non	Ouvert à g., Fermé à d.
$] -\infty; b[$	$x < b$	Non	Ouvert

Exemple 1.2 $[1; 2]$ $] -3; 5]$ $[6; +\infty[$ $] -\infty; 3[$

Remarque 1.2

1. Par convention les crochets sont toujours ouverts en l'infini.
2. $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$ $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$
3. Si a est un nombre réel alors $[a; a]$ qui ne contient qu'une seule valeur est plus simplement noté $\{a\}$.

1.1.3 Appartenance et inclusion

Définition 1.4

Soient A et B deux ensembles et x un élément de A . On écrit :

- $x \in A$ pour signifier que x est un élément de A .
- $x \notin B$ pour signifier que x n'est pas un élément de B .

Définition 1.5

Soient A et B deux ensembles.

On dit que A est inclus dans B si chaque élément de A est un élément de B .

On note $A \subset B$. On dit aussi "A est contenu dans B" ou "A est une partie de B" ou "A est un sous-ensemble de B".

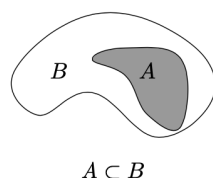


Figure 1.1

Exemple 1.3 $2 \in [1; 4]$ $7 \notin]-3; 5]$ $[[1, 8]] \subset [6; +\infty[$

Remarque 1.3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Exercice 1.1 Soit $E = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{a; b; k\}$ deux ensembles. Peut-on écrire :

- | | | |
|------------------------|----------------------------|------------------------|
| a) $a \in E ?$ | b) $a \subset E ?$ | c) $\{a\} \subset E ?$ |
| d) $\emptyset \in E ?$ | e) $\emptyset \subset E ?$ | f) $B \subset E ?$ |

Propriété 1.1

Soient A et B deux ensembles

- $A \subset A$ (réflexivité)
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ (transitivité)
- $A = B$ si et seulement si ($A \subset B$ et $B \subset A$) (antisymétrie).

1.1.4 Parties d'un ensemble

Définition 1.6

Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 1.4

Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$

Remarque 1.4

Pour dire que x est élément de l'ensemble E, on peut au choix écrire que :
 $x \in E$ ou que $\{x\} \subset E$ ou que $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 1.2 Décrire $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$

1.1.5 Opérations sur les ensembles

Définition 1.7

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

L'ensemble $\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ est appelé **l'intersection des ensembles A et B** et est noté $A \cap B$.

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints. (A ne pas confondre avec distinct qui est la négation de égal)

L'ensemble $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est appelé réunion ou l'union des ensembles A et B et est noté $A \cup B$.

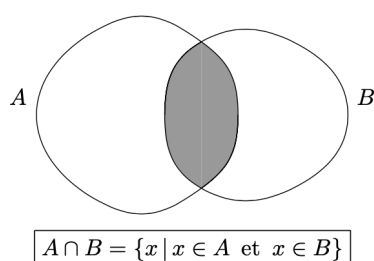


Figure 1.2 Intersection

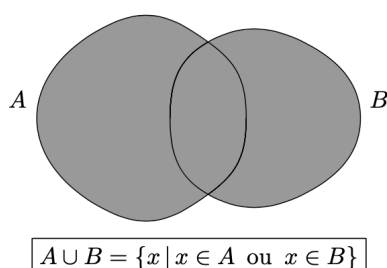


Figure 1.3 Réunion

Exemple 1.5. $[1; 2] \cap]2; 3] = \emptyset$ $] -1; 4] \cap [0; 6] = [0; 4]$. $] -2; 4] \cup \{-2\} = [-2; 4]$

$$]-\infty; 4] \cup [-3; +\infty[= \mathbb{R}$$

Exercice 1.3 Soit $A =]2; 13]$ $B = [3; 5]$ $C = [2; 10]$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B \cup C$ et $(A \cap C) \cup B$

Remarque 1.5 Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

$$1) A \cap \emptyset = \emptyset \text{ et } A \cup \emptyset = A.$$

$$2) A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B$$

$$3) A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B$$

$$4) A \cup B = A \text{ si et seulement si } B \subset A$$

$$5) A \cap B = A \text{ si et seulement si } A \subset B$$

1.2 Calculs dans $\mathbb{R}$

1.2.1 Fractions de deux nombres réels

Définition 1.8

Lorsque $b \neq 0$, le réel q, défini par $q = a \times \frac{1}{b}$, est le quotient de a par b.

Le réel a est le numérateur et le réel b est le dénominateur de la fraction $\frac{a}{b}$.

INTERDIT $\frac{a}{0}$ N'AAUCUN SENS !

Propriété 1.2

Soient a, b, c, d des réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

Pour $a \neq 0$, $\frac{0}{a} = 0$ et pour tout a, $\frac{a}{1} = a$

-Règle des signes

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

-Addition : ATTENTION ON NE PEUT ADDITIONNER (OU SOUSTRAIRE) QUE DEUX FRACTIONS QUI ONT LE MEME DENOMINATEUR

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

- Multiplication

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

-Division

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

⇒ Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

-Simplifier :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

Attention !

Cela ne fonctionne pas avec les additions $\frac{c+a}{c+b} \neq \frac{a}{b}$ en général. Par exemple $\frac{5+5}{5+7} \neq \frac{5}{7}$

Exemple 1.6

$$\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{7} + \frac{8}{7} = \frac{3+8}{7} = \frac{11}{7} \qquad \frac{3}{4} + \frac{8}{5} = \frac{15}{20} + \frac{32}{20} = \frac{47}{20}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28} \qquad 6 \times \frac{3}{13} = \frac{18}{13}$$

$$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{7 \times 3} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{25}{35} = \frac{5 \times 5}{5 \times 7} = \frac{5}{7}$$

Remarque 1.6

- Pour multiplier deux fractions, il est hors de propos de les réduire au même dénominateur.
- Au fur et à mesure des calculs de fractions, on cherchera à simplifier les fractions en présence, afin d'alléger au maximum ses calculs.
- Les résultats seront toujours donnés sous forme de fraction irréductible.

1.2.2 Puissance entière d'un nombre réel

Définition 1.9

Soit n un entier naturel non nul et a un réel.

- Le réel noté a^n (lire « a puissance n ») est le produit de n facteurs tous égaux à a ,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Si a est non nul, on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Par convention, $a^0 = 1$ (avec $a \neq 0$)

Exemple 1.7

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Propriété 1.3

Pour tous réels a et b non nuls et pour tous entiers relatifs m et n

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \dots \times a}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m b^m = (a b)^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

Remarque 1.7

Attention ! Pour un entier n négatif, l'écriture a^n n'a de sens que lorsque a est non nul. Autrement dit, l'écriture a^n peut implicitement contenir un « dénominateur » si la puissance n s'avère négative. Par exemple, l'écriture a^{-12} n'a de sens que lorsque a est non nul, puisque la puissance $n = -12$ est négative.

Exemple 1.8

$$3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$$

$$2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$$

$$(4^5)^3 = 4^{5 \times 3} = 4^{15}$$

$$\frac{4^7}{4^5} = 4^{7-5}$$

$$\frac{8^3}{2^3} = \left(\frac{8}{2}\right)^3 = 4^3$$

1.2.3 Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition 1.10

Soit a un réel positif ou nul. On appelle racine carrée de a , l'unique réel positif (ou nul) x solution de l'équation $x^2 = a$. On le note $x = \sqrt{a}$

ATTENTION : on ne peut prendre que la racine carrée d'un nombre positif

Exemple 1.9

$$\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{16} = 4$$

Propriété 1.4

Pour tous nombres POSITIFS a et b

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \text{ non nul})$$

Remarque 1.8

Si a et b sont deux réels positifs non nuls **on a** $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Ainsi $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$ et en particulier $\sqrt{1+x^2} \neq 1+x$

Définition 1.11

Soit a et b deux réels positifs. On dit que $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sont des quantités conjuguées l'une de l'autre.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

Exemple 1.10

La quantité conjuguée de $3 + \sqrt{5}$ est $3 - \sqrt{5}$

La quantité conjuguée de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est $\sqrt{2} - \sqrt{5}$

La quantité conjuguée de $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$

Méthode 1.1 (Pour simplifier des fractions contenant des racines carrées)

Selon les cas :

- **Premier cas** : Expression de la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ avec a un réel et b un entier strictement positif.

Pour faire disparaître la racine carrée, on multiplie par $\sqrt{b}$ au numérateur et au dénominateur ce qui donne $\frac{a\sqrt{b}}{b}$.

- **Deuxième cas** : Expressions de la forme $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ avec a un réel non nul et b un entier naturel. Pour faire disparaître les racines carrées, on multiplie la fraction au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée.

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

Exemple 1.11

- **Premier cas** : Soit $A = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

- **Deuxième cas** : Soit

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times (\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

1

1.2.4 Identités remarquables

Les deux transformations élémentaires du calcul littéral sont le développement et la factorisation. Elles doivent absolument être maîtrisées. Rappelons que :

- « Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme »
 - « Factoriser une expression consiste à transformer une somme en produit ».
- Les calculs peuvent être raccourcis en utilisant les identités remarquables rappelées ci-dessous.

Propriété 1.5

- D'ordre 2

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(ax + b)^2 = (ax)^2 + 2(ax)b + b^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

$$(ax - b)^2 = (ax)^2 - 2(ax)b + b^2 = a^2x^2 - 2abx + b^2$$

$$(ax + b)(ax - b) = (ax)^2 - b^2 = a^2x^2 - b^2$$

ATTENTION : ne pas écrire ax^2 en pensant à $(ax)^2$ car $(ax)^2 = a^2x^2$

- D'ordre 3

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exercice 1.4 Factoriser les expressions suivantes

$$F(x) = (2x - 3)(x + 1) - (2x - 3)(2x + 3),$$

$$H(x) = (4x - 3)(x + 2) - 20x + 15,$$

$$J(x) = x^3 - x^2 - x + 1,$$

$$L(x, y) = 9x^2y^4 - 3x^4y^2 - 6x^3y^2 + 18xy^4.$$

1.3 Ordre dans $\mathbb{R}$

1.3.1 Egalités

Proposition 1.1

Soient a, b, c, d quatre réels

$$a=b \text{ équivaut à } a+c = b+c$$

$$a=b \text{ équivaut à } a-c = b-c$$

$$a=b \text{ équivaut à } a \times c = b \times c$$

$$\text{Si } c \neq 0 \text{ alors } a=b \text{ équivaut à } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ équivaut à } ad=bc \quad \text{et } d \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

1.3.2 Inégalités

Définition 1.12

- On dit que a est **inférieur ou égal** à b et on note $a \leq b$ si $a - b \in \mathbb{R}_-$.
- On dit que a est **supérieur ou égal** à b et on note $a \geq b$ si $a - b \in \mathbb{R}_+$.
- On dit que a est **inférieur strictement** à b et on note $a < b$ si $a - b \in \mathbb{R}_-^*$.
- On dit que a est **supérieur strictement** à b et on note $a > b$ si $a - b \in \mathbb{R}_+^*$.

$\Rightarrow$ Pour comparer deux nombres réels a et b on étudie généralement le signe de leur différence $b - a$ (ou de façon équivalente de $a - b$)

Proposition 1.2

1. Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$
2. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$. ($\triangle$ on ne peut pas soustraire 2 inégalités)
3. Si $\boxed{0 \leq} a \leq b$ et $\boxed{0 \leq} c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$ ($\triangle$ bien effectuer la vérif. avant de multiplier)
4. Si $a \leq b$ et $\boxed{c \geq 0}$ alors $ac \leq bc$. ($\triangle$ bien effectuer la vérif. avant de multiplier)
5. Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$
6. Passage à l'inverse

$$\text{Si } 0 < a \leq b \quad \text{alors } 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \quad (\text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\text{Si } a \leq b < 0 \quad \text{alors } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0 \quad (\text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_-^*)$$

Remarque 1.9

On retiendra donc que :

1. **On ne peut pas soustraire ni diviser membre à membre deux inégalités.**
2. Il faut vérifier que tous les termes sont **positifs** avant de multiplier membre à membre deux inégalités.
3. Lorsqu'on multiplie une inégalité par une quantité **c**, il faut bien **vérifier le signe de c**.

1.4 Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode 1.2 (Résolution d'(in)équations)

Pour résoudre une équation ou inéquation :

1. **On détermine l'ensemble de définition.**
2. **On résout l'(in)équation.**
3. **On vérifie que les solutions trouvées sont bien dans l'ensemble de définition.**
4. **On n'oublie pas de conclure et de vérifier dans l'équation.**

1.4.1 Equations

Equations du premier degré

Propriété 1.6

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution :

$$x = -\frac{b}{a}$$

Exercice 1.5 Résoudre l'équation (E) : $3x + 4 = 0$.

Equations du second degré

Théorème 1.1 Soient a , b et c des réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercice 1.6 Résoudre l'équation (E) : $2x^2 + x - 6 = 0$.

Remarque 1.10

Pour des équations polynômiales (équation de degré 1, de degré 2...), on ne prendra souvent pas la peine de préciser le domaine de définition puisqu'il s'agit de $\mathbb{R}$ tout entier.

Proposition 1.3

Si le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, alors leur somme S et leur produit P vérifient : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exercice 1.7 (racine évidente)

1. On considère l'équation $x^2 + x - 2 = 0$. Après avoir trouvé la solution évidente, déterminer l'autre solution.
2. On considère l'équation $x^2 - x - 2 = 0$. Après avoir trouvé la solution évidente, déterminer l'autre solution.

Proposition 1.4

Soient s et p deux réels. Alors pour tous réels x_1 et x_2 , on a l'équivalence:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases} \iff x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines du trinôme } f(x) = x^2 - sx + p$$

Exercice 1.8 Trouver deux réels x_1 et x_2 dont la somme vaut 4 et le produit vaut 1.

Equations avec un quotient

Méthode 1.3 (Résolution d'une équation quotient)

Avant de résoudre une équation quotient, **on doit chercher les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule. On appelle ces valeurs des « valeurs interdites »**. On cherche ensuite les valeurs pour lesquelles le numérateur s'annule et on vérifie que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Résoudre l'équation $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ revient à résoudre $A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$

Exercice 1.9 Résoudre l'équation (E) : $\frac{x^2 - x}{x} = 0$.

Il est parfois nécessaire de faire quelques calculs avant de se ramener à une équation quotient. Ainsi, si une équation contient plusieurs fractions rationnelles, on commence par réunir tous les termes dans un seul membre de l'équation et on met toutes les fractions au même dénominateur pour pouvoir les additionner et obtenir une seule fraction rationnelle.

Exercice 1.10 Résoudre l'équation (E) : $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3$.

Equations avec une racine carrée

Cas 1 : $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$

Méthode 1.4

Pour que cette équation soit définie, il faut que : $A(x) \geq 0$ et $B(x) \geq 0$

Cela nous donne donc l'ensemble de définition Df de l'équation. Pour résoudre, on élève au carré, en ayant soin de dire que $x \in Df$.

Exercice 1.11

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}$

Cas 2 : $\sqrt{A(x)} = B(x)$

Méthode 1.5

Pour que cette équation soit définie, il faut que $B(x) \geq 0$ et $A(x) \geq 0$. Cela nous donne donc l'ensemble de définition Df de l'équation. Pour résoudre, on pensera toujours à bien isoler la racine puis on élève au carré, en ayant pris soin de dire que $x \in Df$.

Exercice 1.12

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2-1} = x+2$

1.4.2 Inéquations

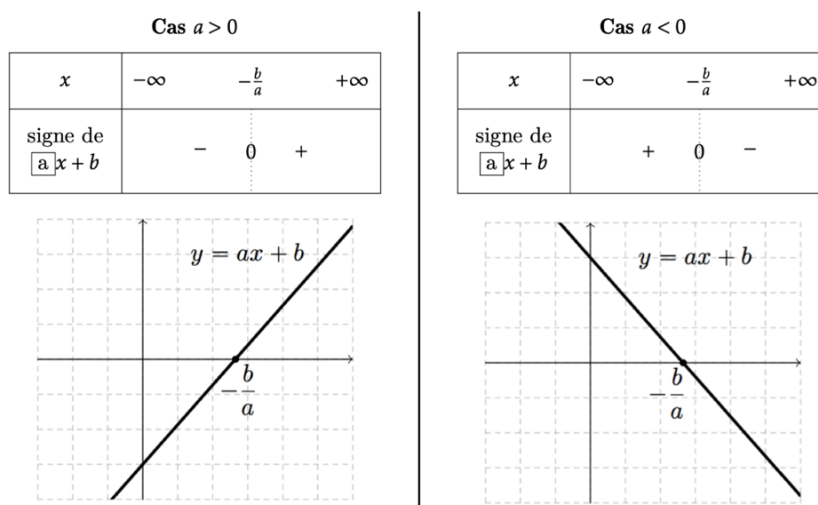
Inéquations du premier degré

Proposition 1.5

L'expression $ax + b$ change de signe au point où elle s'annule:

<u>x</u>	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
<u>a</u> x + b	signe (-a)	0	signe (a)

On a alors deux tableaux de signe, selon le signe de a :



Exercice 1.13 Résoudre l'inéquation (I): $-3x + 1 \leq 0$.

Inéquations du second degré

Proposition 1.6

Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Cas 1 : $\Delta > 0$ 2 racines réelles distinctes x_1, x_2

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		Signe (a)	0	signe(-a)

Donc si $a > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$+$	$-$	$+$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$ax^2 + bx + c$		-	0	+	0	-

Cas 2 : $\Delta = 0$: 1 racine double x_0

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe (a) 0 signe(a)	

Donc si $a > 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$x^2 + bx + c$		$+$	$+$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	-	0	-

Cas 3 : $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		Signe (a)

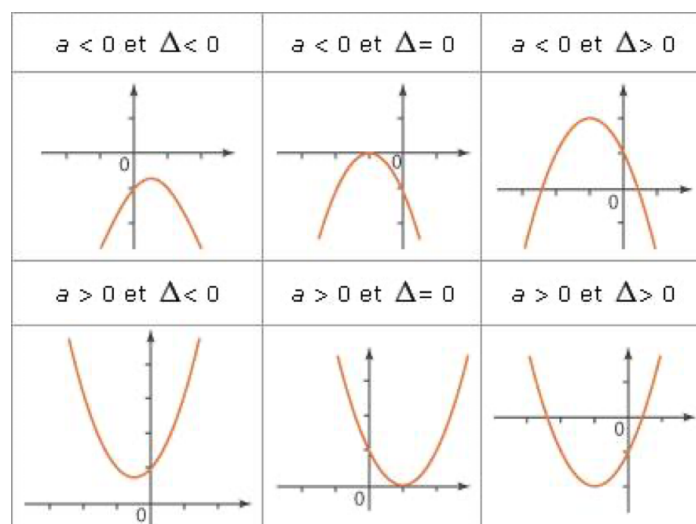
Donc si $a > 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		+	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c		-	

Figure 1.4



Exercice 1.14 Résoudre l'inéquation (I) : $-2x^2 - x + 6 \geq 0$.

Exercice 1.15 Résoudre l'inéquation (I) : $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} < -3$