



CAHIER DE VACANCES DE MATHÉMATIQUES PREPA ECG1

L'objectif de ce cahier de vacances est de vous aider à réviser des points fondamentaux des mathématiques pour vous permettre de commencer sur des bases solides votre première année de prépa. En effet, il est bon de savoir que **la calculatrice est interdite en mathématiques aux concours.**

Cependant, il est aussi nécessaire de préciser que, **toutes les notions de ce cahier de vacances seront abordées tout au long du premier semestre.** Donc il ne faut pas trop s'inquiéter et travailler avant tout sur la partie I.

Les exercices portent principalement sur les thèmes suivants:

- Calcul algébrique
- Trinômes du second degré
- Suites
- Étude de fonctions
- Langage Python

Bonnes vacances

PARTIE I

1- Développer et réduire l'expression suivante :

$$(x - 2)(3x + 4)^2 - (2x^2 + 5x - 4)(x - 2)$$

2- Simplifier au maximum l'écriture suivante sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$:

$$\frac{-2}{x+2} + \frac{5}{x-2} - \frac{2x+12}{x^2-4}$$

3- Factoriser les expressions suivantes (*attention on utilisera uniquement les connaissances de lycée, l'utilisation dans les calculs de connaissances post-bac n'est donc pas autorisée*) :

a- $(8x - 3)^2 - 64x^2 + 9$

b- $x^4 - 5x^2 + 4$

c- $x^3 - 3x^2 - 7x + 21$

4 – Rendre rationnels le dénominateur de chacune des fractions suivantes:

a) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

b) $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ (n est un entier naturel)

5 – Résoudre les équations suivantes dans R

a) $x + 5 = 6x + 30$

b) $\frac{x^2-4x+3}{4x^2-3x-1} = 0$

c) $\sqrt{2-x} = x$

6 – Résoudre les inéquations suivantes dans R

a) $2x + 3 < x - 5$

b) $(x^2 + x - 6)(3x + 7) > 0$

c) $\frac{x^2-2x}{4x^2-5x-6} \leq 0$

PARTIE II

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 3x - x \ln x$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on désigne par f' sa fonction dérivée. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a :

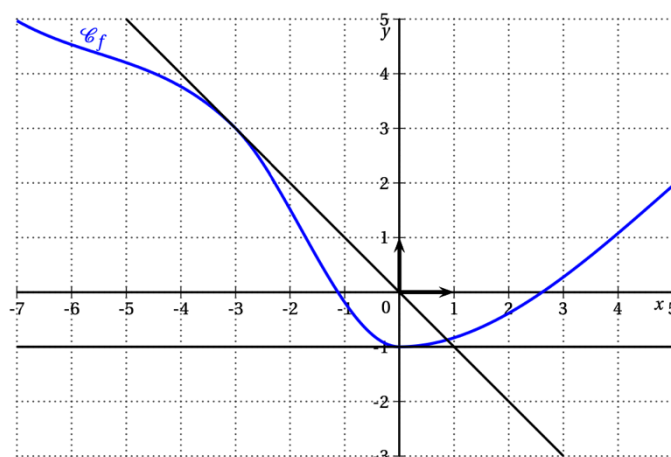
- a. $f'(x) = 3 - \frac{1}{x}$ b. $f'(x) = 3 - \ln x$ c. $f'(x) = 2 - \ln x$

2. On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :

- a. 4095 b. 8191 c. $\frac{1-2^{14}}{1-2}$

3. La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0 .



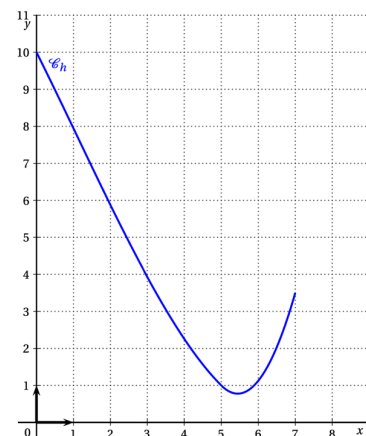
- a. $f'(0) = -1$ b. $f'(-1) = 0$ c. $f'(-3) = -1$ d. $f'(-3) = 3$

4. On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = (x+1) \ln(x)$.

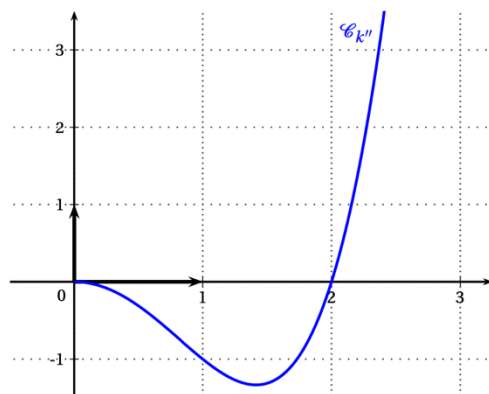
- a. $g'(x) = \frac{1}{x}$ b. $g'(x) = 1 + \ln(x)$
c. $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d. $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x)$

5. On considère la fonction définie sur $[0;7]$ et représentée par la courbe ci-contre:

- a. $\int_0^5 h(x) dx = h(5) - h(0)$ b. $20 < \int_0^5 h(x) dx < 30$
c. $15 < \int_0^5 h(x) dx < 20$ d. $\int_0^5 h(x) dx = 20$

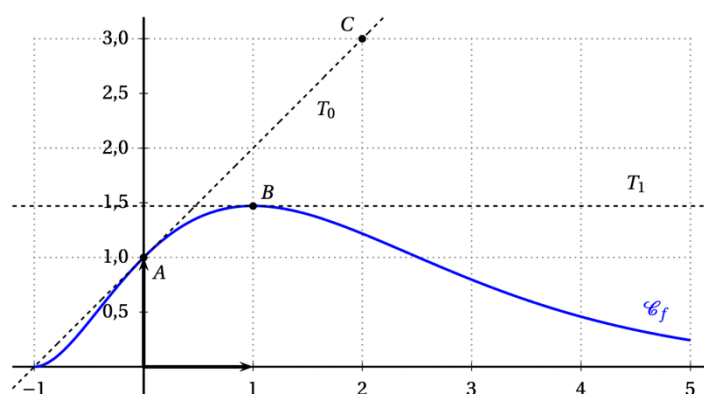


6. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0; +\infty[$.



- a. k est concave sur l'intervalle $[1; 2]$.
b. k est convexe sur l'intervalle $[0; 2]$.
c. k est convexe sur $[0; +\infty[$.
d. k est concave sur $[0; +\infty[$.

7. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1; 5]$.
On note f' la fonction dérivée de f .
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0; 1)$ et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2; 3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



A- La valeur exacte de $f'(1)$ est :

- a. 0
b. 1
c. 1,6
d. autre réponse

B- La valeur exacte de $f'(0)$ est :

- a. 0
b. 1
c. 1,6
d. autre réponse

C- La valeur exacte de $f(1)$ est :

- a. 0
b. 1
c. 1,6
d. autre réponse

D- Un encadrement de $\int_0^2 f(x) dx$ par des entiers naturels successifs est :

- a. $3 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 4$
b. $2 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 3$
c. $1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 2$
d. autre réponse

8. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 3]$:

Dans l'intervalle $[-1 ; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

- a. exactement 3 solutions
b. exactement 2 solutions
c. exactement 1 solution
d. pas de solution

x	-1	1	2	3
variations de f		2	-1	-0,5

9. L'équation $\ln(2x) = 2$ admet une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$. On a :

- a. $x_0 = 0$ b. $x_0 = \frac{e^2}{2}$ c. $x_0 = \frac{\ln 2}{2}$ d. $x_0 = 3,6945$

10. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 400$ et de raison $\frac{1}{2}$.

La somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$ est égale à :

- a. $2 \times (1 - 0,5^{10})$ b. $2 \times (1 - 0,5^{11})$
c. $800 \times (1 - 0,5^{10})$ d. $800 \times (1 - 0,5^{11})$

11. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2 + 3\ln(x)$.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :

- a. $y = \frac{3}{x}$ b. $y = 3x - 1$ c. $y = 3x$ d. $y = 3x + 2$

12. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - 3x^2$.

La courbe représentative de g admet un point d'inflexion qui a pour abscisse :

- a. 1 b. 0 c. $\ln 3$ d. $\ln 2$

13. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,6)$.

La probabilité qui admet pour valeur approchée 0,012 est :

- a. $p(X = 2)$ b. $p(X \geq 2)$ c. $p(X \leq 2)$ d. $p(X < 2)$

14. Dans les questions A et B, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

A- On peut affirmer que :

- a. $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$ b. $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ c. $\frac{u_2}{v_2} = 1,75$ d. $5u_1 = 3v_1$.

On considère le programme ci-contre écrit en langage Python:

B- Ce programme renvoie :

- a. u_{11} et v_{11} ; b. u_{10} et v_{11} ; c. les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10; d. u_{10} et v_{10} .

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1,11)
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return (u, v)
```

15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$ est définie par :

- a. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$; b. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x - 2$;
c. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x + 1$; d. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x$.

PARTIE III

Une entreprise fabrique et vend des copeaux de bois utilisés par des particuliers ou des collectivités pour empêcher la repousse des mauvaises herbes dans les jardins. L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de copeaux par jour.

Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de copeaux en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros. Dans l'entreprise le prix de vente d'une tonne de copeaux de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par : $R(x)=3x$ où x désigne la quantité de copeaux en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de copeaux en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe , on donne C et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O .

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de copeaux en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. **a.** Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de copeaux fabriqués et vendus.
b. Déterminer les quantités possibles de copeaux en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par : $g(x)=-0,6x+4+e^{-x+5}$

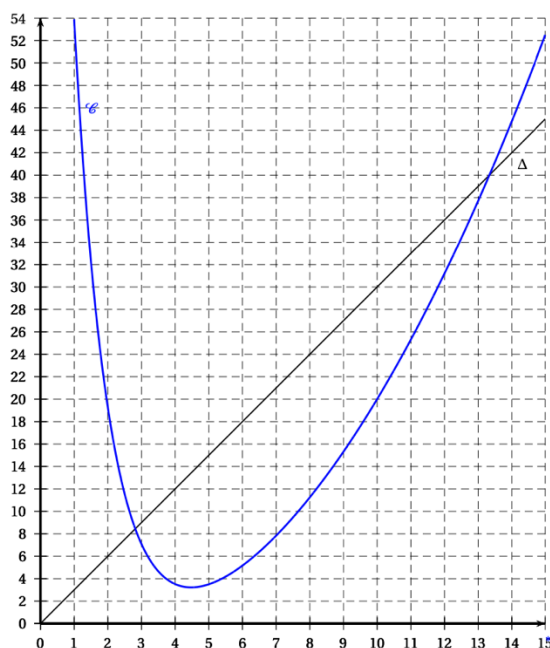
On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1; 15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$.
b. En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1;15]$.
2. **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1; 15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
b. Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 15]$. Donner une valeur approchée de α à 0, 1 près.
c. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1;15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a : $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$
2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1; 15]$ et on note D' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1;15]$.
- 4.a. Pour quelle quantité de copeaux l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0, 1 tonne près.
- b. Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

ANNEXE



PARTIE IV

En plus des règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$, on admet que la relation d'ordre $\leq$ vérifie les propriétés suivantes:

- (a) quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$;
 - (b) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$;
 - (c) si $x, y, z \in \mathbb{R}$ vérifient $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$;
 - (d) quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$;
 - (e) quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ si et seulement si $y - x \geq 0$;
 - (f) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x \geq 0, y \geq 0$, alors $x + y \geq 0$;
 - (g) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x \geq 0, y \geq 0$, alors $xy \geq 0$;
 - (h) si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$, et réciproquement.
- (et on note, pour deux nombres réels x et y , $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$).

En utilisant **uniquement** ces propriétés, montrer les assertions qui suivent (portant sur des nombres réels a, b, c, d, λ) :

- 1) si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$
- 2) si $a \leq b$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda a \leq \lambda b$
- 3) Si $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$
- 4) Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

PARTIE V

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

- 1.a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b. Étudier la position relative de la courbe C_f de f et de la droite Δ d'équation réduite $y = \frac{1}{3}x$
2. a. Montrer que pour tout réel x $f(x) = \ln(1 + e^x) - \frac{2}{3}x$
b. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. a. Déterminer la fonction dérivée de f notée f' .
b. En déduire les variations de la fonction f .
4. On considère la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
 - a. Déterminer une équation de T .
 - b. Soient M et N sont deux points de la courbe C_f d'abscisses non nulles et opposées.
Montrer que la droite (MN) est parallèle à T .

PARTIE VI

En 2024, un journal local compte 1000 abonnés. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, le journal perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés. Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2024+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée «suite» est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n):  
    u = 1000  
    for i in range(n):  
        u = 0,9*u + 250  
    return u
```

4. a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n $u_n \leq 2500$.
b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas le calcul de sa limite).

- FIN -