

PARTIE I

1- Développer et réduire l'expression suivante :

$$(x-2)(3x+4)^2 - (2x^2 + 5x - 4)(x-2) = 7x^3 + 5x^2 - 18x - 40$$

2- Simplifier au maximum l'écriture suivante sur l'intervalle $[3; +\infty[$:

$$\frac{-2}{x+2} + \frac{5}{x-2} - \frac{2x+12}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$$

3- Factoriser les expressions suivantes (*attention on utilisera uniquement les connaissances de lycée, l'utilisation dans les calculs de connaissances post-bac n'est donc pas autorisée*) :

a- $(8x-3)^2 - 64x^2 + 9 = -6(8x-3)$

b- $x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

c- $x^3 - 3x^2 - 7x + 21 = x^2(x-3) - 7(x-3) = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x-3)$

4 – Rendre rationnels le dénominateur de chacune des fractions suivantes:

a) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = 13 - 2\sqrt{42}$

b) $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2+5\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{23}$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (n est un entier naturel)

5 – Résoudre les équations suivantes dans R

a) $S = \{-5\}$

b) $S = \{3\}$

c) $\sqrt{2-x} = x$ équivaut à $x^2 + x - 2 = 0$ et $x \geq 0$ $S = \{1\}$

6 – Résoudre les inéquations suivantes dans R

a) $S =]-\infty; -8[$

b) L'équation a un sens si $4x^2 - 5x - 6 \neq 0$ donc l'ensemble de définition est

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}; 2 \right\}$. On utilise alors un tableau de signes:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	+	0	-	0 +
$4x^2 - 5x - 6$	+	0	-	-	0 +
$\frac{x^2-2x}{4x^2-5x-6}$	+		-	0 +	

$$S = \left] -\frac{3}{4}; 0 \right]$$

c) Ensemble de définition : $D =]-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty[$

Pour tout $x \in D$ l'inéquation équivaut à $x^2 - x - 1 \leq 0$ d'où $S = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0 \right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

PARTIE II

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 3x - x \ln x$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on désigne par f' sa fonction dérivée. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a :

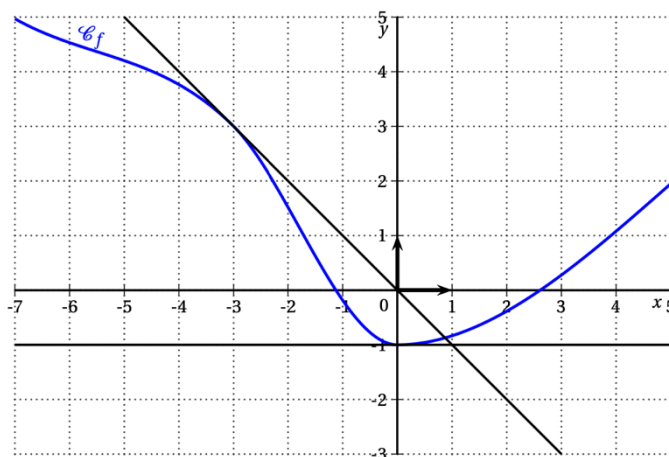
- a. $f'(x) = 3 - \frac{1}{x}$ b. $f'(x) = 3 - \ln x$ **c. $f'(x) = 2 - \ln x$**

2. On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :

- a. 4095 **b. 8191** c. $\frac{1-2^{14}}{1-2}$

3. La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0 .



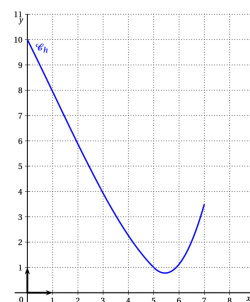
- a. $f'(0) = -1$ b. $f'(-1) = 0$ **c. $f'(-3) = -1$** d. $f'(-3) = 3$

4. On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = (x+1) \ln(x)$.

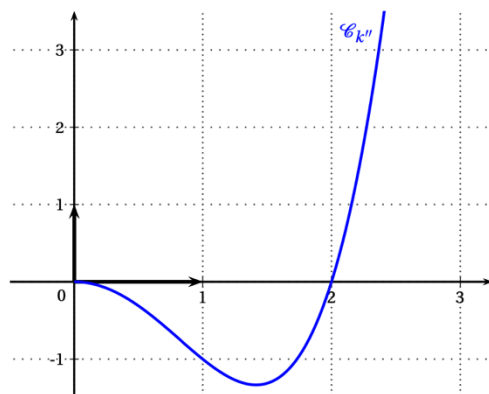
- a. $g'(x) = \frac{1}{x}$ b. $g'(x) = 1 + \ln(x)$
c. $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ **d. $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x)$**

5. On considère la fonction définie sur $[0;7]$ et représentée par la courbe ci-contre:

- a. $\int_0^5 h(x) dx = h(5) - h(0)$ **b. $20 < \int_0^5 h(x) dx < 30$**
c. $15 < \int_0^5 h(x) dx < 20$ d. $\int_0^5 h(x) dx = 20$

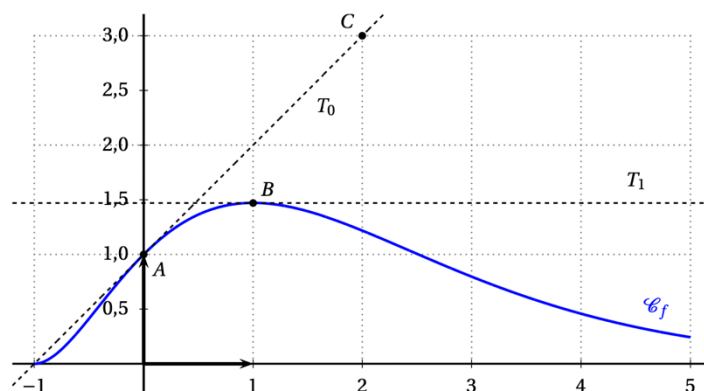


6. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0; +\infty[$.



- ☒ a. k est concave sur l'intervalle $[1; 2]$.
☐ b. k est convexe sur l'intervalle $[0; 2]$.
☐ c. k est convexe sur $[0; +\infty[$.
☐ d. k est concave sur $[0; +\infty[$.

7. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1; 5]$.
 On note f' la fonction dérivée de f .
 La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0; 1)$ et par le point B d'abscisse 1.
 La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2; 3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



A- La valeur exacte de $f'(1)$ est :

- ☒ a. 0
☐ b. 1
☐ c. 1,6
☐ d. autre réponse

B- La valeur exacte de $f'(0)$ est :

- ☐ a. 0
☒ b. 1
☐ c. 1,6
☐ d. autre réponse

C- La valeur exacte de $f(1)$ est :

- ☐ a. 0
☐ b. 1
☐ c. 1,6
☒ d. autre réponse

D- Un encadrement de $\int_0^2 f(x) dx$ par des entiers naturels successifs est :

- ☐ a. $3 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 4$
☒ b. $2 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 3$
☐ c. $1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 2$
☐ d. autre réponse

8. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 3]$:

Dans l'intervalle $[-1 ; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

- a. exactement 3 solutions
b. exactement 2 solutions
 c. exactement 1 solution
 d. pas de solution

x	-1	1	2	3
variations de f		2	-1	-0,5

9. L'équation $\ln(2x) = 2$ admet une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$. On a :

- a. $x_0 = 0$ **b. $x_0 = \frac{e^2}{2}$** c. $x_0 = \frac{\ln 2}{2}$ d. $x_0 = 3,6945$

10. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 400$ et de raison $\frac{1}{2}$.

La somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$ est égale à :

- a. $2 \times (1 - 0,5^{10})$ b. $2 \times (1 - 0,5^{11})$
 c. $800 \times (1 - 0,5^{10})$ **d. $800 \times (1 - 0,5^{11})$**

11. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2 + 3\ln(x)$.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :

- a. $y = \frac{3}{x}$ **b. $y = 3x - 1$** c. $y = 3x$ d. $y = 3x + 2$

12. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - 3x^2$.

La courbe représentative de g admet un point d'inflexion qui a pour abscisse :

- a. 1 b. 0 **c. $\ln 3$** d. $\ln 2$

13. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,6)$.

La probabilité qui admet pour valeur approchée 0,012 est :

- a. $p(X = 2)$ b. $p(X \geq 2)$ **c. $p(X \leq 2)$** d. $p(X < 2)$

14. Dans les questions A et B, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

A- On peut affirmer que :

- a. $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$ b. $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c. $\frac{u_2}{v_2} = 1,75$** d. $5u_1 = 3v_1$.

On considère le programme ci-contre écrit en langage Python:

B- Ce programme renvoie :

- a. u_{11} et v_{11} ; b. u_{10} et v_{11} ; c. les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10; **d. u_{10} et v_{10} .**

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1,11)
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return (u, v)
```

15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$ est définie par :

- a. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$; **b. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x - 2$;**
 c. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x + 1$; d. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x$.

PARTIE III

Partie A : Étude graphique

1. La quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise correspond au minimum de la fonction C ; elle est égale à 4,5.
2. a. $C(6) = 5$ et $R(6) = 18$ donc $D(6) = 18 - 5 = 13$.
Le résultat net pour une production de 6 tonnes est donc de 1300 euros.
- b. L'entreprise réalise un bénéfice quand la production x est telle que le coût est strictement inférieur au rapport, c'est-à-dire quand $C(x) < R(x)$, autrement dit entre 2,8 et 13,3 tonnes.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :
 $g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$.

1. a. La fonction g est dérivable $[1; 15]$ et $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$.
 b. $e^{-x+5} > 0$ quelle que soit la valeur de x donc $-e^{-x+5} < 0$ et par suite, $g'(x) < 0$ comme somme de deux nombres strictement négatifs.
 La fonction g est donc strictement décroissante sur $[1; 15]$
2. a. $g(1) \approx 58$ et $g(15) \approx -5$; on a donc le tableau de variation suivant :

x	1	α	15
$g'(x)$		-	
$g(x)$	58	0	-5

- b. Le tableau de variation de g justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; 15]$;

$$\left. \begin{array}{l} g(6) \approx 0,77 > 0 \\ g(7) \approx -0,06 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in [6; 7]$$

$$\left. \begin{array}{l} g(6,9) \approx 0,01 > 0 \\ g(7,0) \approx -0,06 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in [6,9; 7]$$
 Enfin $\left. \begin{array}{l} g(6,91) \approx 0,002 > 0 \\ g(6,92) \approx -0,005 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in [6,91; 6,92]$
 Donc $\alpha \approx 6,9$ à 0,1 près.
- c. On en déduit donc le tableau de signe suivant :

x	1	α	15
$g(x)$	+	0	-

Partie C : Application économique

1. $D(x) = R(x) - C(x) = 3x - (0,3x^2 - x + e^{-x+5}) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$
2. $D'(x) = -0,3 \times 2x + 4 + e^{-x+5} = g(x)$
3. $D(1) \approx -50,9$, $D(\alpha) \approx 13,17$ et $D(15) \approx -7,5$;
 on aura donc le tableau de variation de la fonction D suivant :

x	1	α	15
$g(x)$	+	0	-
$D(x)$	-50,9	13,17	-7,5

4. a. L'entreprise rendra son bénéfice maximal pour une production de α tonnes soit environ 6,9 tonnes
- b. Le bénéfice réalisé sera alors de 1317 euros.

PARTIE IV

En plus des règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$, on admet que la relation d'ordre $\leq$ vérifie les propriétés suivantes:

- (a) quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$;
 - (b) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$;
 - (c) si $x, y, z \in \mathbb{R}$ vérifient $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$;
 - (d) quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$;
 - (e) quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ si et seulement si $y - x \geq 0$;
 - (f) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x \geq 0, y \geq 0$, alors $x + y \geq 0$;
 - (g) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x \geq 0, y \geq 0$, alors $xy \geq 0$;
 - (h) si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$, et réciproquement.
- (et on note, pour deux nombres réels x et y , $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$).

En utilisant **uniquement** ces propriétés, montrer les assertions qui suivent (portant sur des nombres réels a, b, c, d, λ) :

1

Supposons $a \leq b$ et $c \leq d$.

D'après (e), on en déduit $b - a \geq 0$ et $d - c \geq 0$.

D'après (f), on en déduit $(b - a) + (d - c) \geq 0$, ce qui se réécrit $b + d - (a + c) \geq 0$.

D'après (e), on en déduit $a + c \leq b + d$.

2

Supposons $a \leq b$ et $\lambda \geq 0$.

D'après (e), on a $b - a \geq 0$.

D'après (g), on en déduit $\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a) \geq 0$.

D'après (e), on en déduit $\lambda a \leq \lambda b$.

3

Supposons $a > 0$.

Supposons par l'absurde $\frac{1}{a} \leq 0$.

On a $a \geq 0$ et $\frac{1}{a} \leq 0$. D'après (iii), on en déduit $1 = a \times \frac{1}{a} \leq 0$.

Par ailleurs, $1 = 1^2$, donc (viii) entraîne $1 \geq 0$.

D'après (b), on en déduit $1 = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, on sait que $\frac{1}{a}$ n'est pas ≤ 0 . Or, d'après (c), on sait que $\frac{1}{a} \geq 0$ ou $\frac{1}{a} \leq 0$. La seule possibilité est donc que $\frac{1}{a} \geq 0$.

Enfin, comme l'inverse d'un nombre réel n'est jamais nul, on en déduit $\frac{1}{a} > 0$.

4

Supposons $0 < a \leq b$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} && \text{(légitime car } a, b \neq 0) \\ &= (b - a) \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Les trois termes de ce produit sont ≥ 0 (le premier par (e), les deux suivants par (xv)), donc on obtient $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 0$, donc $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

PARTIE V

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ et $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$ donc, par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $1 + e^{-x} > 1$ donc $\ln(1 + e^{-x}) > 0$.

$\mathcal{C}$ est au-dessus de d sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2. a. \quad f(x) &= \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}(e^x + 1)) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}) + \ln(e^x + 1) + \frac{1}{3}x = -x + \ln(e^x + 1) + \frac{1}{3}x \\ &= \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$ et $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$ donc, par composée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{2}{3} = \frac{3e^x - 2(e^x + 1)}{3(e^x + 1)} = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

b. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

f est donc décroissante sur $]-\infty ; \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2 ; +\infty[$.

4. a. Une équation réduite de la tangente T est

$$y = f'(0)x + f(0) \text{ soit } T : y = -\frac{1}{6}x + \ln 2$$

b.

Soit a un réel non nul. Le point M d'abscisse a de $\mathcal{C}$ a pour coordonnées $M(a ; f(a))$.

Le point N a donc pour abscisse $-a$ et pour ordonnée $f(-a)$.

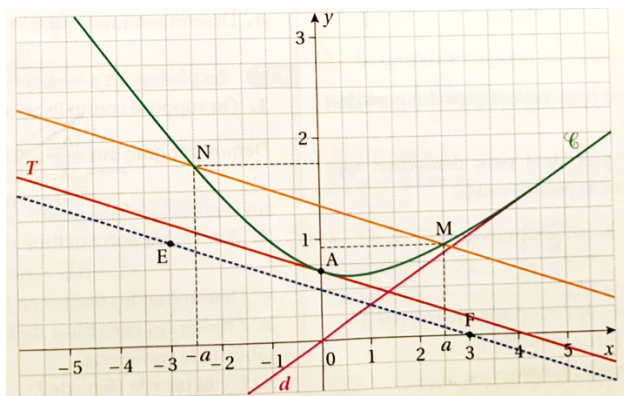
$f(a) = \ln(e^a + 1) - \frac{2}{3}a$ est obtenu en utilisant l'expression de f donnée à la question 2.a

$f(-a) = \ln(1 + e^a) - \frac{1}{3}a$ est obtenu en utilisant l'expression de f donnée au départ.

Le coefficient directeur de la droite (MN) est égal à :

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{f(a) - f(-a)}{2a} = \frac{\ln(e^a + 1) - \frac{2}{3}a - \left(\ln(1 + e^a) - \frac{1}{3}a\right)}{2a} = \frac{-\frac{1}{3}a}{2a} = -\frac{1}{6}$$

Les droites T et (MN) ont le même coefficient directeur donc elles sont parallèles.



PARTIE VI

1. On a donc $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.

Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9 ; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne $\approx 1\,977$.

4. a. *Initialisation* : on a $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq 2\,500$.

La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500$ ou $0,9u_n \leq 2\,250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,9u_n + 250 \leq 2\,250 + 250$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la relation est encore vraie au rang $n + 1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2\,500$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or d'après la question précédente : $u_n \leq 2\,500$, puis $0,1u_n \leq 0,1 \times 2\,500$ ou encore $0,1u_n \leq 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leq -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leq -0,1u_n + 250$.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

- FIN -